



- ▶ Συνδυασμοί και διατάξεις με επανάληψη



Διατάξεις με επανάληψη: Με πόσους τρόπους μπορώ  
διατάξω  $r$  από  $n$  αντικείμενα, όταν επιτρέπονται  
επαναληπτικές εμφανίσεις των αντικειμένων;

- ▶ Στην αρχή έχω  $n$  αντικείμενα από τα οποία πρέπει να διαλέξω ένα. Μετά την επιλογή μου αυτή, τοποθετώ το αντικείμενο, που διάλεξα μαζί με τα υπόλοιπα. Άρα τη δεύτερη φορά έχω πάλι  $n$  αντικείμενα στη διάθεσή μου για να διαλέξω. Όμοια, για κάθε μια από τις  $r$  επιλογές μου.
- ▶ Υπάρχουν  $n$  επιλογές για το πρώτο αντικείμενο,  $n$  επιλογές για το δεύτερο αντικείμενο, ...,  $n$  επιλογές για το  $r$ -οστό αντικείμενο  $\Rightarrow \underbrace{n \cdot n \dots \cdot n}_{r \text{ φορές}} = n^r$ .



Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί υπάρχουν στο δεκαδικό σύστημα;

- ▶ Καθένα από τα 4 ψηφία μπορώ να το διαλέξω με 10 διαφορετικούς τρόπους.
- ▶ Άρα, συνολικά  $10^4$  τετραψήφιοι αριθμοί.



Πόσα διαφορετικά υποσύνολα ενός συνόλου  $S$  με  $n$  στοιχεία υπάρχουν;

- ▶ Καθένα από τα  $n$  στοιχεία του δοσμένου συνόλου  $S$  μπορώ να το διαλέξω με 2 διαφορετικούς τρόπους: να επιλέξω ή να μην επιλέξω να ανήκει σε κάποιο υποσύνολο του  $S$ .
- ▶ Άρα, συνολικά  $2^n$  υποσύνολα.



Συνδυασμοί με επανάληψη: Με πόσους τρόπους μπο-  
να διαλέξω  $r$  από  $n$  αντικείμενα, όταν επιτρέπονται  
επαναληπτικές εμφανίσεις των αντικειμένων;

- ▶ Το σύνολο των αντικειμένων από το οποίο γίνεται η επιλογή είναι το  $\{1, \dots, n\}$ .
- ▶ Ένας συνδυασμός  $r$  αντικειμένων από  $n$  με επανάληψη είναι μια ακολουθία  $x_1, x_2, \dots, x_r$  με  $1 \leq x_i \leq n$  και  $x_i \leq x_j$  όταν  $1 \leq i \leq j \leq r$  ή αλλιώς τα αντικείμενα κάθε ακολουθίας που προκύπτει τα διατάσσω σε αύξουσα σειρά, αφού με ενδιαφέρουν τα αντικείμενα και όχι η σειρά τους.
- ▶ Αλλά, επειδή επιτρέπεται να διαλέξω σε διαφορετικές θέσεις το ίδιο αντικείμενο πρέπει να βρω έναν τρόπο να ορίσω τους όρους κάθε ακολουθίας μονοσήμαντα  $\Rightarrow$  Χρησιμοποιώ την 1-1 και επί αντιστοιχία:  
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x_1 + 0, x_2 + 1, \dots, x_n + r - 1)$$
- ▶ Οπότε, πλέον διαλέγω  $r$  αντικείμενα από  $n + r - 1$  χωρίς επανάληψη, δηλ.  $C(n + r - 1, r)$  (που ξέρω να το υπολογίζω).



Συνδυασμοί με επανάληψη: Με πόσους τρόπους μπορ να διαλέξω  $r$  από  $n$  αντικείμενα, όταν επιτρέπονται επαναληπτικές εμφανίσεις των αντικειμένων;

- ▶ Θεωρούμε ότι τα  $n$  δοσμένα αντικείμενα προσδιορίζονται από τους ακέραιους  $1, 2, 3, \dots, n$ .
- ▶ Θεωρούμε ότι τα  $r$  αντικείμενα, που επιλέγουμε προσδιορίζονται από μια λίστα ακεραίων  $\{j, k, l, \dots, m\}$  σε αύξουσα διάταξη.
  - ▶ Π.χ., η λίστα  $\{1, 1, 1, 3, 4, 5, 5, \dots\}$  σημαίνει ότι το 1ο αντικείμενο έχει επιλεγθεί 3 φορές, το 2ο καμμία, το 3ο μία, το 4ο μία, το 5ο δύο κ.ο.κ.
- ▶ Τροποποιούμε την ακολουθία αυτή των  $r$  αντικειμένων ως εξής:  $j + 0, k + 1, l + 2, \dots, m + (r - 1)$  σε αύξουσα διάταξη
  - ▶ Π.χ., η προηγούμενη λίστα θα γινόταν  $\{1 + 0, 1 + 1, 1 + 2, 3 + 3, 4 + 4, 5 + 5, 5 + 6, \dots\} = \{1, 2, 3, 6, 8, 10, 11, \dots\}$
- ▶ Και πλέον κάθε επιλογή  $r$  αντικειμένων προσδιορίζεται μοναδικά σα μια επιλογή  $r$  διαφορετικών ακεραίων από τους  $1, 2, \dots, n + (r - 1)$ .



Συνδυασμοί με επανάληψη: Με πόσους τρόπους μπορ να διαλέξω  $r$  από  $n$  αντικείμενα, όταν επιτρέπονται επαναληπτικές εμφανίσεις των αντικειμένων;

- ▶ Δίνονται τα ( $n =$ ) 4 αντικείμενα  $\{1, 4, 7, 11\}$  και μάς ζητάνε να επιλέξουμε ( $r =$ ) 3 από αυτά όταν επιτρέπονται επαναλήψεις.
- ▶ Τα δοσμένα αντικείμενα προσδιορίζονται από τη λίστα των ακεραίων 1, 2, 3, 4.
- ▶ Έστω ότι η επιλογή μας είναι η λίστα  $\{2, 4, 4\}$  (με τα στοιχεία της τοποθετημένα σε αύξουσα διάταξη), που σημαίνει ότι στη λίστα αυτή το 1ο δοσμένο αντικείμενο δεν εμφανίζεται, το 2ο εμφανίζεται μία φορά, το 3ο δεν εμφανίζεται και το 4ο εμφανίζεται 2 φορές.
- ▶ Τροποποιώ τη λίστα  $\{2, 4, 4\}$ :  
 $\{2 + 0, 4 + 1, 4 + 2\} = \{2, 5, 6\}$ .
- ▶ Δηλ., η λίστα των επιλεγμένων αντικειμένων προέκυψε επιλέγοντας 3 από τους αριθμούς  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  χωρίς επαναλήψεις, αντί 3 από τους  $\{1, 2, 3, 4\}$  με επαναλήψεις.



Συνδυασμοί με επανάληψη: Με πόσους τρόπους μπορ να διαλέξω  $r$  από  $n$  αντικείμενα, όταν επιτρέπονται επαναληπτικές εμφανίσεις των αντικειμένων;

- ▶ Αντίστροφα, αν επέλεξα τη λίστα  $\{4, 5, 6\}$  σημαίνει ότι επέλεξα τη  $\{4 - 0, 5 - 1, 6 - 2\} = \{4, 4, 4\}$  δηλ., το αντικείμενο επέλεξα 3 φορές το αντικείμενο 4, δηλ., επέλεξα 3 φορές το 11.
- ▶ Δηλαδή: δεν έχει σημασία 'ποιά' αντικείμενα είναι στο δοσμένο σύνολο αλλά 'πόσα' και επειδή οι επαναλήψεις έχουν πλέον σημασία, αλλά εγώ ξέρω να μετράω συνδυασμούς χωρίς επαναλήψεις, πρέπει να τροποποιήσω ανάλογα το σύνολο των δοσμένων αντικειμένων.





- ▶  $r$  αντικειμένων επιλεγμένων από  $n$  αντικείμενα:

$$\binom{n+r-1}{r}$$



## Πόσες ζαριές υπάρχουν στο τάβλι;

- ▶ Κάθε ζάρι μπορεί να πάρει  $n = 6$  διαφορετικές τιμές, έχω  $r = 2$  ζάρια και μετράω τις επαναλήψεις.
- ▶ Διαλέγω  $r = 2$  από  $n = 6$  αντικείμενα με επανάληψη  $\Leftrightarrow$  Ψάχνω τους συνδυασμούς  $r = 2$  από  $n = 6$  αντικειμένων με επανάληψη.
- ▶ Άρα, έχω συνολικά:  $\binom{n+r-1}{r} = \binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$  ζαριές.