Στοιχειώδης συνδυαστική

- Διανομή αντικειμένων σε υποδοχές

Διανομή Αντικειμένων σε Υποδοχές

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να διανείμουμε r αντικείμενα (διακεκριμένα ή όχι) σε n υποδοχές.
- Διακρίνουμε περιπτώσεις:
  1. Τα αντικείμενα είναι διαφορετικά (διακεκριμένα) και η σειρά στις υποδοχές δε μετράει.

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{r} = n^r$$

Για το πρώτο αντικείμενο έχουμε n επιλογές ως προς το που θα το τοποθετήσουμε. Όμοια για το δεύτερο, αφού δεν απαγορεύεται να ρίξουμε δυο αντικείμενα στην ίδια υποδοχή, κοκ. Άρα, συνολικά μπορώ να τοποθετήσω τα r αντικείμενα στις n υποδοχές με n^r τρόπους.

Διανομή Αντικειμένων σε Υποδοχές

2. Τα αντικείμενα είναι διαφορετικά (διακεκριμένα) και η σειρά σε κάθε υποδοχή μετράει.

$$\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}$$

Αρχικά διατάσσω τα r αντικείμενα. Θα προσομοιώσω τις n υποδοχές με $(n+1)$ κάθετες γραμμές, που θα τοποθετήσω ανάμεσα στα διατεταγμένα αντικείμενα. Αντικείμενα, που βρίσκονται μεταξύ της i-στής και της $(i+1)$-στής γραμμής θα θεωρούμε ότι βρίσκονται στην i-στή υποδοχή.

$$\underbrace{|\alpha_1\alpha_3\alpha_5|\alpha_2\alpha_6|........|}_{n \text{ υποδοχές}}$$

Διανομή Αντικειμένων σε Υποδοχές

2. Τα αντικείμενα είναι διαφορετικά (διακεκριμένα) και η σειρά σε κάθε υποδοχή μετράει.

$$\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}$$

$$\underbrace{|\alpha_1\alpha_3\alpha_5|\alpha_2\alpha_6|........|}_{n \text{ υποδοχές}}$$

Από τις $n+1$ γραμμές, που τοποθέτησα, μόνο οι $n-1$ ορίζουν τις υποδοχές (μπορώ να αγνοήσω τις ακραίες). Ο συνολικός αριθμός αντικειμένων, που έχω είναι $r+(n-1)$ (r αρχικά αντικείμενα και $n-1$ γραμμές), και μπορώ να τα διατάξω με $(n+r-1)!$ τρόπους. Όμως τα $n-1$ αντικείμενα (οι γραμμές) είναι ίδια (δεν είναι διακεκριμένα), άρα, έχω μόνο $\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}$ διαφορετικούς τρόπους.

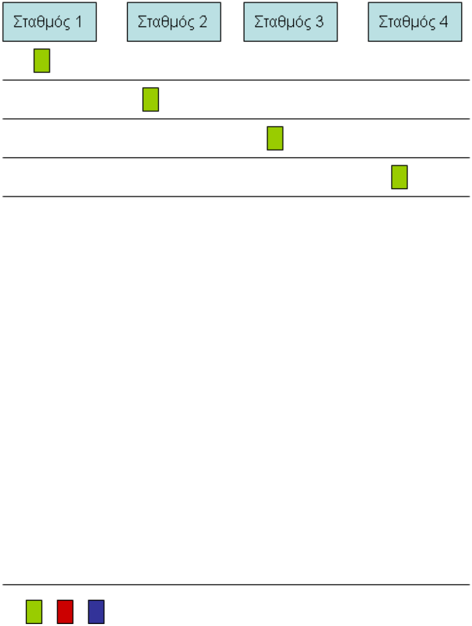
Πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι να περάσουν k (διαφορετικά) αυτοκίνητα από n διαφορετικούς υπαλλήλους διοδίων, όταν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία κάθε υπάλληλος εξυπηρετεί τα αυτοκίνητα;

- Το πρώτο αυτοκίνητο έχει n επιλογές όσοι και οι υπάλληλοι.
- Το δεύτερο αυτοκίνητο έχει $n+1$ επιλογές: αν πάει στον υπάλληλο, που πήγε και το πρώτο αυτοκίνητο να πάει πρίν ή μετά από αυτό.
- Το τρίτο αυτοκίνητο έχει $n+2$ επιλογές: αν πάει στον υπάλληλο, που πήγε και το πρώτο αυτοκίνητο να πάει πρίν ή μετά από αυτό, αν πάει στον υπάλληλο, που πήγε και το δεύτερο αυτοκίνητο να πάει πρίν ή μετά από αυτό.
- Το k αυτοκίνητο έχει $n+k-1$ επιλογές: όμοια, όπως προηγουμένως.

Άρα συνολικά (από κανόνα γινομένου) υπάρχουν:

$n(n+1)...(n+k-1) = \dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$ διαφορετικοί τρόποι.

4 τρόποι



Για κάθε έναν από αυτούς…

4 τρόποι

Για κάθε έναν από αυτούς...

5 τρόποι

4 τρόποι

Για κάθε έναν από αυτούς...

5 τρόποι

Για κάθε έναν από αυτούς...

6 τρόποι

3. Τα αντικείμενα είναι ίδια (δεν είναι διακεκριμένα).

$$\binom{n+r-1}{r}$$

Όπως στην προηγούμενη περίπτωση, μόνο, που αυτή τη φορά και τα r αντικείμενα είναι ίδια (δεν είναι διακεκριμένα), επομένως, έχουμε μόνο $\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \binom{n+r-1}{r}$ διαφορετικούς τρόπους να τα διατάξουμε.

Διανομή αντικειμένων σε υποδοχές: με πόσους τρόπο μπορούμε να τοποθετήσουμε r διαφορετικά (διακεκριμένα) αντικείμενα σε n διαφορετικές (διακεκριμένες) υποδοχές, όταν δε μετράει η σειρά;

- Για το αντικείμενο 1 έχουμε n τρόπους (δηλ. μπορούμε να το τοποθετήσουμε σε κάθε μία από τις n διαθέσιμες υποδοχές).
- Για το αντικείμενο 2 έχουμε n τρόπους (δηλ. μπορούμε να το τοποθετήσουμε σε κάθε μία από τις n διαθέσιμες υποδοχές).
- ...
- Για το αντικείμενο r έχουμε n τρόπους (δηλ. μπορούμε να το τοποθετήσουμε σε κάθε μία από τις n διαθέσιμες υποδοχές).
- Άρα, συνολικά $\underbrace{n \cdot \ldots \cdot n}_{r \text{ φορές}} = n^r$.

Διανομή αντικειμένων σε υποδοχές: με πόσους τρόπο μπορούμε να τοποθετήσουμε r διαφορετικά (διακεκριμένα) αντικείμενα σε n διαφορετικές (διακεκριμένες) υποδοχές, όταν μετράει η σειρά;

- 1ος τρόπος:
  - Οι n υποδοχές είναι τα διαστήματα, που ορίζονται από $n+1$ σημεία πάνω σε μια ευθεία.
  - Το πρώτο από αυτά τα σημεία μπαίνει πάντα στην αρχή και το τελευταίο πάντα στο τέλος, επομένως, υπάρχουν $n-1$ ίδια (μη διακεκριμένα) σημεία που πρέπει να διαχωρίσουν r διαφορετικά (διακεκριμένα) αντικείμενα.
  - Επομένως, ζητάμε τις διατάξεις $r+n-1$ αντικειμένων από τα οποία τα $n-1$ είναι ίδια (μη διακεκριμένα). Αυτός είναι: $\frac{(r+n-1)!}{(n-1)!}$.

Διανομή αντικειμένων σε υποδοχές: με πόσους τρόπο μπορούμε να τοποθετήσουμε r διαφορετικά (διακεκριμένα) αντικείμενα σε n διαφορετικές (διακεκριμένες) υποδοχές, όταν μετράει η σειρά;

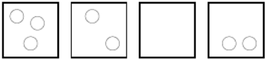
- 2ος τρόπος:
  - Για το 1ο από τα r αντικείμενα, υπάρχουν n τρόποι τοποθέτησης σε κάθε μία από τις n διαθέσιμες υποδοχές. Αφού επιλεγεί μία, αυτή χωρίζεται στα δύο.
  - Για το 2ο από τα r αντικείμενα, υπάρχουν $n+1$ τρόποι τοποθέτησης σε κάθε μία από τις n διαθέσιμες υποδοχές και τη 1 νέα. Αφού επιλεγεί μία, αυτή χωρίζεται στα δύο.
  - Για το 3ο από τα r αντικείμενα, υπάρχουν $n+2$ τρόποι τοποθέτησης σε κάθε μία από τις n διαθέσιμες υποδοχές και τις 2 νέες. Αφού επιλεγεί μία, αυτή χωρίζεται στα δύο, κοκ.
  - Για το r-οστό από τα r αντικείμενα, υπάρχουν $n+r-1$ τρόποι τοποθέτησης σε κάθε μία από τις n διαθέσιμες υποδοχές και τις $r-1$ νέες.
  - Άρα, συνολικά: $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+r-1)$ τρόποι.

Διανομή αντικειμένων σε υποδοχές: με πόσους τρόπο μπορούμε να τοποθετήσουμε r ίδια (μη διακεκριμένα) αντικείμενα σε n διαφορετικές (διακεκριμένες) υποδοχές, όταν μετράει η σειρά;

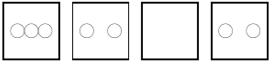
- 1ος τρόπος:
  - Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε r διαφορετικά (διακεκριμένα) αντικείμενα σε n διαφορετικές (διακεκριμένες) υποδοχές, όταν μετράει η σειρά; $\frac{(r+n-1)!}{(n-1)!}$
  - Αλλά τώρα τα r αντικείμενα είναι ίδια (μη διακεκριμένα) $\Rightarrow$ οι ζητούμενοι τρόποι είναι $\frac{(r+n-1)!}{(n-1)!r!}$.

Διανομή αντικειμένων σε υποδοχές: με πόσους τρόπο μπορούμε να τοποθετήσουμε r ίδια (μη διακεκριμένα) αντικείμενα σε n διαφορετικές (διακεκριμένες) υποδοχές, όταν μετράει η σειρά;

- 2ος τρόπος:
  - Όπως πριν με τα διαστήματα στην ευθεία, μόνο που τώρα τόσο η ομάδα που περιέχει τα $n-1$ σημεία, όσο και αυτή που περιέχει τα r αντικείμενα περιέχουν ίδια (μη διακεκριμένα) στοιχεία: $\frac{(r+n-1)!}{(n-1)!r!}$.



Έστω ότι τοποθετούμε με κάποιον τρόπο τις ίδιες μπάλες στα διαφορετικά κουτιά.



Δεν αλλάζει κάτι αν ευθυγραμμίσουμε τις μπάλες.

Δεν αλλάζει κάτι αν σβήσουμε κάποια όρια από τα κουτιά. Το πώς τοποθετήσαμε τις μπάλες στα κουτιά μπορεί να παρασταθεί με μια ακολουθία από 0 και 1: 0001001100.

Αν υπάρχουν r μπάλες και n κουτιά τότε πρέπει να τοποθετήσουμε r '0' και $n-1$ '1' σε $n+r-1$ θέσεις. Αυτό γίνεται με $C(r+n-1, r)$ τρόπους.

Σύντομη επανάληψη: Με πόσους τρόπους μπορούμε ν διανείμουμε r αντικείμενα σε n υποδοχές;

- Διαφορετικά αντικείμενα:
  - Δε μετράει η σειρά: $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{r} = n^r$
  - Μετράει η σειρά: $\dfrac{(n+r-1)!}{(n-1)!}$
- Ίδια αντικείμενα: $\dfrac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \dbinom{n+r-1}{r}$

Παραδείγματα

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε r ίδιες μπάλες σε n διαφορετικά κουτιά, αν κάθε κουτί χωράει μία μόνο μπάλα;
- $C(n, r)$
- Πόσες δυαδικές ακολουθίες 32 ψηφίων έχουν ακριβώς 7 άσσους;
- $C(32, 7)$

Με πόσους τρόπους r ίδιες μπάλες μπορούν να τοποθετηθούν σε n διαφορετικά κουτιά, έτσι ώστε κάθε κουτί να περιέχει τουλάχιστον 9 μπάλες;

- Τουλάχιστον 9 μπάλες σε κάθε κουτί: $9n$ μπάλες.
- Μένουν $r-9n$ ίδιες μπάλες τις οποίες μπορούμε να τοποθετήσουμε στα n διαφορετικά κουτιά με όλους τους δυνατούς τρόπους $\Rightarrow \frac{(r-9n+n-1)!}{(n-1)!(r-9n)!} = \binom{r-9n+n-1}{r-9n}$.

Έχω 7 α, 8 β, 5 γ και 4δ. Πόσες συμβολοσειρές μπορ φτιάξω αν δεν πρέπει να εμφανίζεται το 'γα' σε καμία από αυτές;

- Μόνο με τα 7 α, τα 8 β και τα 4δ μπορώ να φτιάξω $\frac{19!}{7!8!4!}$ διατάξεις χωρίς κανέναν περιορισμό.
- Για κάθε μία από τις παραπάνω διατάξεις, θεωρώ ότι τα 5 γ είναι 5 ίδια αντικείμενα, που τοποθετούνται σε διαφορετικές υποδοχές που σχηματίζονται από την υπάρχουσα διάταξη. Έχουμε συνολικά 19 γράμματα, που σχηματίζουν 20 διαφορετικές υποδοχές: μία πριν από κάθε γράμμα και μία στο τέλος. Το γ δε μπορεί να τοποθετηθεί πριν από α, γιατί θα σχηματιστεί γα. Οπότε μένουν 13 υποδοχές για να τοποθετηθεί το γ: πριν από κάποιο β, πριν από κάποιο δ ή στο τέλος. Οι διαφορετικοί τρόποι να τοποθετηθούν τα 5 γ είναι: $\binom{13+5-1}{5} = \frac{17!}{5!12!}$.
Άρα, συνολικά: $\frac{19!}{7!8!4!} + \frac{17!}{5!12!}$

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε r διαφορετικές σημαίες σε n διαφορετικούς ιστούς με δεδομένα ότι (α) έχει σημασία η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι σημαίες στους ιστούς και (β) κανένας ιστός δεν πρέπει να μείνει άδειος ($r \geq n$);

- Για να ισχύει το (β):
  $P(r, n) = r(r-1)...(r-n+1) = \frac{r!}{(r-n)!}$ τρόποι
- Για να ισχύει και το (α): $\frac{(r-n+n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(r-1)!}{(n-1)!}$ τρόποι

Επομένως, συνολικά: $\frac{r!}{(r-n)!} \cdot \frac{(r-1)!}{(n-1)!}$ τρόποι.

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 4 ίδ πορτοκάλια και 6 διαφορετικά μήλα σε 5 διαφορετικά κουτιά; Σε ποιο ποσοστό αυτών των τρόπων τοποθετούνται 2 ακριβώς φρούτα σε κάθε κουτί;

- Τα 4 ίδια πορτοκάλια μπορούμε να τα τοποθετήσουμε στα 5 κουτιά με $\frac{(4+5-1)!}{4!(5-1)!} = \frac{8!}{4!4!} = 70$ διαφορετικούς τρόπους.
- Τα 6 διαφορετικά μήλα μπορούμε να τα τοποθετήσουμε στα 5 κουτιά (χωρίς να μετράει η σειρά) με $5^6 = 15.625$ διαφορετικούς τρόπους.

Επομένως, συνολικά έχουμε $70 \cdot 15.625 = 1.093.750$ διαφορετικούς τρόπους.

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 4 ίδ πορτοκάλια και 6 διαφορετικά μήλα σε 5 διαφορετικά κουτιά; Σε ποιο ποσοστό αυτών των τρόπων τοποθετούνται 2 ακριβώς φρούτα σε κάθε κουτί;

Για να έχουμε 2 ακριβώς φρούτα σε κάθε κουτί, ασχολούμαστε πρώτα με τα 4 πορτοκάλια που είναι ίδια:

- Βάζουμε από 2 πορτοκάλια σε 2 από τα πέντε κουτιά. Πόσοι διαφορετικοί τρόποι να διαλέξω τα κουτιά αυτά υπάρχουν; $C(5,2) = \frac{5!}{2!3!} = 10$.
- Τα 6 διαφορετικά μήλα μπορώ να τα χωρίσω σε 3 διμελείς ομάδες (μία για καθένα από τα υπόλοιπα 3 κουτιά) με $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$ τρόπους.
  Άρα συνολικά $10 \cdot 90 = 900$ τρόποι.

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 4 ίδ πορτοκάλια και 6 διαφορετικά μήλα σε 5 διαφορετικά κουτιά; Σε ποιο ποσοστό αυτών των τρόπων τοποθετούνται 2 ακριβώς φρούτα σε κάθε κουτί;

- Βάζουμε 2 πορτοκάλια σε 1 κουτί με $C(5,1) = \frac{5!}{1!4!} = 5$ τρόπους, και από ένα πορτοκάλι σε 2 από τα πέντε κουτιά με $C(4,2) = \frac{4!}{2!2!} = 6$ τρόπους.
  Τα 6 διαφορετικά μήλα μπορώ να τα χωρίσω σε 2 διμελείς ομάδες (μία για καθένα από τα υπόλοιπα 2 κουτιά) με $\frac{6!}{2!2!} = 180$ τρόπους.
  Άρα συνολικά $5 \cdot 6 \cdot 180 = 5.400$ τρόποι.

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 4 ίδ πορτοκάλια και 6 διαφορετικά μήλα σε 5 διαφορετικά κουτιά; Σε ποιο ποσοστό αυτών των τρόπων τοποθετούνται 2 ακριβώς φρούτα σε κάθε κουτί;

- Βάζουμε από 1 πορτοκάλια σε 4 κουτιά με
  $C(5,4) = \frac{5!}{4!1!} = 5$ τρόπους.
  Τα 6 διαφορετικά μήλα μπορώ να τα χωρίσω σε ζευγάρια
  (για το κουτί που μένει) με $\frac{6!}{2!} = 360$ τρόπους.
  Άρα συνολικά $5 \cdot 360 = 1.800$ τρόποι.

Επομένως, συνολικά $900 + 5.400 + 1.800 = 8.100$ τρόποι. Οπότε το ζητούμενο ποσοστό είναι $\frac{8.100 \times 100}{1.093.750}\% = 7.4\%$

(α) Πόσες ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ με $x_i \geq 0$ υπάρχουν; (β) Πόσες με $x_i > 0$; (γ) Πόσες με $x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, x_3 \geq 4, x_4 \geq 0$;

- (α) Το πρόβλημα είναι ίδιο με την εύρεση των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης 12 ίδιων αντικειμένων (των μονάδων) σε 4 διαφορετικά κουτιά (τους όρους της εξίσωσης). Επομένως, υπάρχουν $\dfrac{(12+4-1)!}{12!(4-1)!} = 455$ τρόποι, δηλ., διαφορετικές λύσεις.

(α) Πόσες ακέραιες λύσεις της εξίσωσης
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ με $x_i \geq 0$ υπάρχουν;
(β) Πόσες με $x_i > 0$;
(γ) Πόσες με $x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, x_3 \geq 4, x_4 \geq 0$;

- (β) Το πρόβλημα είναι ίδιο με την εύρεση των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης 12 ίδιων αντικειμένων (των μονάδων) σε 4 διαφορετικά κουτιά (τους όρους της εξίσωσης), αλλά κάνενα κουτί να μην είναι άδειο. Επομένως, υπάρχουν $\dfrac{(8+4-1)!}{8!(4-1)!} = 165$ τρόποι, δηλ., διαφορετικές λύσεις.

(α) Πόσες ακέραιες λύσεις της εξίσωσης
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ με $x_i \geq 0$ υπάρχουν;
(β) Πόσες με $x_i > 0$;
(γ) Πόσες με $x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, x_3 \geq 4, x_4 \geq 0$;

- (γ) Το πρόβλημα είναι ίδιο με την εύρεση των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης 12 ίδιων αντικειμένων (των μονάδων) σε 4 διαφορετικά κουτιά (τους όρους της εξίσωσης) με τους δοσμένους περιορισμούς. Επομένως, υπάρχουν $\dfrac{(4+4-1)!}{4!(4-1)!} = 35$ τρόποι, δηλ., διαφορετικές λύσεις.

Σε ένα μαγαζί τα αντικείμενα Α, Β και Γ κοστίζουν α 5 ευρώ και το αντικείμενο Δ 20 ευρώ. Αν θέλω να ξοδέψω συνολικά 100 ευρώ πόσες διαφορετικές αγορές μπορώ να κάνω;

- Το μικρότερο ποσό είναι τα 5 ευρώ και τα άλλα είναι πολλαπλάσιά του. Οπότε, θεωρώ αυτό ως μονάδα και μπορώ να διατυπώσω την παραπάνω ερώτηση ως: $A + B + \Gamma + 4\Delta = 20$ με $A, B, \Gamma, \Delta \geq 0$.
- Επειδή το Δ έχει συντελεστή 4, πρέπει να πούμε ρητά πόσα αντικείμενα τύπου Δ αγοράζουμε. Έστω i το πλήθος τους. Οπότε, η εξίσωση γίνεται: $A + B + \Gamma + 4i = 20 \Leftrightarrow A + B + \Gamma = 20 - 4i$ με $A, B, \Gamma, \Delta \geq 0$ και $0 \leq i \leq 5$.

Σε ένα μαγαζί τα αντικείμενα Α, Β και Γ κοστίζουν (5 ευρώ και το αντικείμενο Δ 20 ευρώ. Αν θέλω να ξοδέψω συνολικά 100 ευρώ πόσες διαφορετικές αγορές μπορώ να κάνω;

- Το πρόβλημα είναι ίδιο με την εύρεση των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης $20-4i$ ίδιων αντικειμένων (των μονάδων) σε 3 διαφορετικά κουτιά, για κάθε τιμή $0 \leq i \leq 5$. Επομένως, υπάρχουν $\sum_{i=0}^{5} \frac{(20-4i+3-1)!}{(20-4i)!(3-1)!} =$ $\sum_{i=0}^{5} \frac{(20-4i+3-1)!}{(20-4i)!2!} = \sum_{i=0}^{5} \frac{(11-2i)!}{(20-4i)!} = 536$ τρόποι, δηλ., διαφορετικές λύσεις.

Με πόσους τρόπους μπορούν να διανεμηθούν $2n+1$ θέσεις ενός συνεδριακού κέντρου σε 3 ομάδες, ώστε ο συνασπισμός οποιωνδήποτε δύο ομάδων να τους εξασφαλίσει πλειοψηφία; (Τόσο οι θέσεις όσο και οι σύνεδροι της κάθε ομάδας δε διακρίνονται μεταξύ τους)

- Δίνεται ότι: '*τόσο οι θέσεις όσο και οι σύνεδροι της κάθε ομάδας δε διακρίνονται μεταξύ τους*'. Επομένως, διανομές των θέσεων, που προκύπτουν η μία από την άλλη με ανταλλαγή θέσεων συνέδρων μεταξύ τους, ή προσώπων συνέδρων, χωρίς αλλαγή του αριθμού των συνέδρων της κάθε ομάδας, δε μετράνε ως διαφορετικές. Έτσι, το πρόβλημα μετατρέπεται σε πρόβλημα τοποθέτησης μη διακεκριμένων (δηλ., ίδιων) αντικειμένων σε διακεκριμένες υποδοχές (τις διαφορετικές ομαδες).

Με πόσους τρόπους μπορούν να διανεμηθούν $2n+1$ θέσεις ενός συνεδριακού κέντρου σε 3 ομάδες, ώστε ο συνασπισμός οποιωνδήποτε δύο ομάδων να τους εξασφαλίσει πλειοψηφία; (Τόσο οι θέσεις όσο και οι σύνεδροι της κάθε ομάδας δε διακρίνονται μεταξύ τους)

- Ιδέα: Αν μία ομάδα έχει $n+1$ θέσεις, τότε οι δύο άλλες δε μπορούν ποτέ να έχουν πλειοψηφία. Άρα για να απαντήσουμε στην ερώτηση πρέπει:
  1. να βρούμε με πόσους τρόπους μπορούν να διανεμηθούν $2n+1$ θέσεις σε 3 ομάδες χωρίς περιορισμό, και
     - Τρόποι τοποθέτησης $2n+1$ ίδιων αντικειμένων σε 3 υποδοχές: $\binom{2n+1+3-1}{2n+1} = \binom{2n+3}{2n+1}$
  2. να αφαιρέσουμε από αυτούς εκείνους τους τρόπους, που δίνουν τουλάχιστον $n+1$ θέσεις σε μία μόνο ομάδα
     - Δίνουμε $n+1$ θέσεις σε μία από τις ομάδες οπότε μένουν για διανομή $2n+1-n-1=n$ θέσεις.
     - Τρόποι τοποθέτησης n ίδιων αντικειμένων σε 3 υποδοχές: $\binom{n+3-1}{n} = \binom{n+2}{n}$.
     - Συνολικά, αφού υπάρχουν 3 ομάδες: $3 \cdot \binom{n+2}{n}$.

Με πόσους τρόπους μπορούν να διανεμηθούν $2n + 1$ θέσεις ενός συνεδριακού κέντρου σε 3 ομάδες, ώστε ο συνασπισμός οποιωνδήποτε δύο ομάδων να τους εξασφαλίσει πλειοψηφία; (Τόσο οι θέσεις όσο και οι σύνεδροι της κάθε ομάδας δε διακρίνονται μεταξύ τους)

- Οπότε οι ζητούμενοι τρόποι είναι: $\binom{2n+3}{2} - 3 \cdot \binom{n+2}{2} = \frac{n}{2} \cdot (n+1)$.

Σύνοψη-Πρακτικά (1)

Έχω 10 ψηφία (διακεκριμένα αντικείμενα).

- Μπορώ να φτιάξω $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ διαφορετικές 4-άδες (διατάξεις 4 από 10 αντικειμένων $= P(10, 4)$).
  ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: η τετράδα 1,2,3,4 είναι διαφορετική από την τετράδα 4,3,2,1.
- Μπορώ να διαλέξω $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!}$ διαφορετικές 4-άδες (συνδυασμοί 4 από 10 αντικειμένων $= C(10, 4) = \frac{P(10,4)}{P(4,4)}$).
  ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: η τετράδα 1,2,3,4 μετράει 1 φορά και δεν είναι διαφορετική από την τετράδα 4,3,2,1.

Σύνοψη-Πρακτικά (2)

- Έχω 100 μπάλες (μη διακεκριμένα αντικείμενα).
  Τις χωρίζω σε ομάδες από πράσινες, κόκκινες και μπλε μπάλες.
  Οι πράσινες μπάλες είναι 60, οι κόκκινες 30 και οι μπλε 10.
  Υπάρχουν $\frac{100!}{60!30!10!}$ τρόποι να διατάξω τις 100 μπάλες.
- Έχω 2 διαφορετικά δυαδικά ψηφία (διακεκριμένα αντικείμενα): 0 και 1.
  Έχω όσα θέλω από αυτά (επιτρέπονται οι επαναλήψεις).
  Μπορώ να φτιάξω 2^5 διαφορετικές 5-άδες.
- Έχω 2 ζάρια, αλλά δε με ενδιαφέρει η σειρά, που πέφτουν (συνδυασμοί).
  Κάθε ζάρι έχει 6 πιθανές τιμές και μπορεί να φέρνει την ίδια τιμή συνεχώς (επιτρέπονται επαναλήψεις).
  Υπάρχουν συνολικά $C(6+2-1, 2)$ ζαριές.

Σύνοψη-Πρακτικά (3)

- Έχω n αντικείμενα, ένα από το καθένα και δε με νοιάζει η σειρά.
  Υπάρχουν $2^n - 1$ τρόποι για να επιλέξω ένα ή περισσότερα από αυτά.
  - 2: επιλέγω/δεν επιλέγω κάποιο αντικείμενο.
  - -1: πρέπει να επιλέξω τουλάχιστον ένα.
- Έχω t ομάδες μη διακεκριμένων αντικειμένων, κάθε μία με μέγεθος $q_1, q_2, ..., q_t$, αντίστοιχα.
  - Μπορώ να διαλέξω ένα ή περισσότερα αντικείμενα με $(q_1 + 1)(q_2 + 1)...(q_t + 1) - 1$ τρόπους.

Σύνοψη-Πρακτικά (4)

- n διακεκριμένες υποδοχές, r διακεκριμένα αντικείμενα, δε μετράει η σειρά στις υποδοχές: n^r τρόποι (μπορεί να υπάρχουν και άδειες υποδοχές).
- n διακεκριμένες υποδοχές, r διακεκριμένα αντικείμενα, μετράει η σειρά στις υποδοχές: $\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}$ τρόποι (μπορεί να υπάρχουν και άδειες υποδοχές).
- n διακεκριμένες υποδοχές, r μη διακεκριμένα αντικείμενα: $\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!}$ τρόποι (μπορεί να υπάρχουν και άδειες υποδοχές).