ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 2019

1. Σε ένα σχολείο υπάρχουν 1000 μαθητές. Από αυτούς 400 μιλάνε Γαλλικά, 300 Ιταλικά και 200 μιλάνε Γερμανικά. Εάν υπάρχουν 200 μαθητές που μιλάνε οποιεσδήποτε 2 γλώσσες και 100 μαθητές, που μιλάνε και τις 3 γλώσσες, πόσοι είναι οι μαθητές που δεν μιλάνε καμία γλώσσα;
ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Να χρησιμοποιηθεί η ΑΡΧΗ ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΥ - ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΥ

Απάντηση:
Έστω S, το σύνολο των μαθητών με N=|S| = 1000. Έστω επίσης F,I,G, τα γεγονότα ένας μαθητής να μιλάει Γαλλικά, Ιταλικά ή Γερμανικά αντίστοιχα. Τότε ψάχνουμε το N($\overline{F}\,\overline{I}\,\overline{G}$) και σύμφωνα με την Αρχή Εγκλεισμού Αποκλεισμού έχουμε:
N($\overline{F}\,\overline{I}\,\overline{G}$) = N – N(F) – N(I) – N(G) + N(FI) + N(FG) + N(IG) – N(FIG) = 1000 – 400 – 300 - 200 + 200 – 100 = 200

2. Να λυθεί η T(n) =2T($\frac{n}{2}$) + n, T(1)=1.
ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Να χρησιμοποιηθούν ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΑΔΡΟΜΗΣ

Απάντηση:

Ορίζουμε στην σχέση T(n) =2T($\frac{n}{2}$) + n ως σχέση (1) και θέτω όπου n το $\frac{n}{2}$. Έτσι προκύπτει:

T(n) =2T($\frac{n}{2}$) + n = 2[2T($\frac{n}{2^2}$) + $\frac{n}{2}$] + n = 2^2T($\frac{n}{2^2}$) + 2n …

Συνεχίζω με παρόμοιο τρόπο στην παραπάνω σχέση μέχρι να καταλήξω στην σχέση: T(n) = 2^iT($\frac{n}{2^i}$) + in

Αν θέσουμε όπου 2^i το n, έχουμε ότι T(n) = n + nlogn => T(n) = O(nlogn)

3. Έχω n Θέσεις στην σειρά και θέλω να τοποθετήσω k φοιτητές για να γράψουν εξετάσεις, ώστε μεταξύ κάθε δύο φοιτητών να υπάρχει μία κενή θέση (n ≥ 2k - 1). Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να το κάνω;
ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Να χρησιμοποιηθούν ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΑ.

Απάντηση:

Βγάζω φοιτητές και θρανία από την αίθουσα. Δίνω ένα θρανίο σε κάθε φοιτητή. Αυτό γίνεται με ένα μόνο τρόπο, καθότι τα θρανία είναι ίδια, οπότε δεσμεύω k θρανία. Διατάσσω τους φοιτητές με τα θρανία τους. Υπάρχουν k! διαφορετικοί τρόποι εφόσον οι φοιτητές είναι διαφορετικοί. Τοποθετώ ένα άδειο θρανίο ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι φοιτητών. Αυτό γίνεται με 1 τρόπο, εφόσον τα θρανία είναι ίδια. Ανάμεσα σε k φοιτητές, δημιουργούνται k-1 υποδοχές, οπότε δεσμέυω k-1 Θρανία.

Μοιράζω τα n - 2k + 1 ϊδια θρανία που περίσσεψαν σε k+1 διαφορετικές υποδοχές.

Αυτό γίνεται με: $\binom{k+1+n-2k+1-1}{n-2k+1} = \binom{n-k+1}{n-2k+1}$

Άρα συνολικά υπάρχουν k! $\binom{n-k+1}{n-2k+1}$ διαφορετικοί τρόποι.

4. Να υπολογίσετε με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν τα 52 (διακεκριμένα) χαρτιά μίας τράπουλας σε 4 (διακεκριμένους) παίκτες, όταν κάθε παίκτης πρέπει να πάρει τουλάχιστον ένα χαρτί.

   ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Να χρησιμοποιηθούν ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.

Απάντηση:

Τα χαρτιά είναι διαφορετικά, οπότε μας ενδιαφέρει η σειρά (όχι η σειρά με την οποία μοιράζονται τα χαρτιά αλλά με την έννοια ότι μας επιβάλλουν μια διάταξη στους παίκτες). Άρα, πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις μιας και οι παίκτες αλλά και τα χαρτιά θεωρούνται διακεκριμένες οντότητες.

Για κάθε παίκτη η ΓΣ είναι: $\frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = e^x - 1$. Κάθε παράγοντας στο γινόμενο εκφράζει την δυνατότητα μοιάσματος ενός, δύο, τριών ή περισσότερων χαρτιών σε κάθε ένα από τους τέσσερεις παίκτες.

Κάθε παίκτης πρέπει να πάρει τουλάχιστον 1 εκ των 52 χαρτιών και έχουμε 4 παίκτες, που σημαίνει ότι ένας παίκτης μπορεί να πάρει το πολύ 49 χαρτιά, οπότε θα σταματήσουμε το παραπάνω άθροισμα στον όρο $\frac{x^{49}}{49!}$. Τότε όμως το άθροισμα δεν θα ισούται με $e^x - 1$. Επεκτείνοντας το άθροισμα στο άπειρο δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα, καθώς οι μεγαλύτερες δυνάμεις του x δεν επηρεάζουν τον ζητούμενο συντελεστή.

Άρα η ΓΣ για όλους τους παίκτες είναι:

$(e^x - 1)^4 = e^{4x} - 4e^{3x} + 6e^{2x} - 4e^x + 1$

Η απάντηση στην ερώτηση δίνεται από το συντελεστή του όρου:

$\frac{x^{52}}{52!}$, που είναι $4^{52}-4*3^{52}+6*2^{52}-4$