ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι
ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

1. (α′) Χωρίζω τα $2n$ αντικείμενα σε δύο κατηγορίες:
   Στα n αντικείμενα που είναι όλα ίδια μεταξύ τους και στα υπόλοιπα n διαφορετικά αντικείμενα.
   Δηλαδή μπορούμε να επιλέξουμε από τα $2n$ αντικείμενα ως εξής:

n ίδια	n διαφορετικά
$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{n}$
$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{n-1}$
$\vdots$	$\vdots$
$\binom{n}{n}$	$\binom{n}{0}$

   <u>Προφανώς</u> ο αριθμός των επιλογών k αντικειμένων από τα n ίδια αντικείμενα είναι πάντα 1, αφού τα αντικείμενα αυτά είναι ίδια.

   Δηλαδή:
   Ο αριθμός των τρόπων επιλογής n από $2n$ αντικείμενα (με n αντικείμενα <u>από</u> τα $2n$, όμοια) είναι:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} \overset{\binom{n}{k}=1}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

   (β′) Όμοια με το (α) χωρίζουμε τα $3n+1$ αντικείμενα στους 2 σωρούς. Ο ένας έχει τα $2n+1$ διαφορετικά αντικείμενα και ο δεύτερος τα n ίδια. Το να διαλέξεις n αντικείμενα από τα $3n+1$ ισοδυναμεί με το να διαλέξεις k από τον πρώτο σωρό και $n-k$ από το δεύτερο, για κάθε k. Ο αριθμός των τρόπων όμως που μπορούμε να διαλέξουμε $n-k$ από τα n όμοια είναι πάντα 1.
   Άρα ο αριθμός των επιλογών είναι:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\cdot 1 = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} \tag{1}$$

   Έστω $A = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}$

   Παρατηρώ ότι:

$$A = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \tag{2}$$

Είναι βέβαια $\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1}$

Πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε το $\mathbf{X} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$

$\mathbf{X} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{(2n+1)-k}$

Θέτω $m = 2n+1-k$, άρα $0 \leq m \leq n$

$$\mathbf{X} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{2n+1-k} = \sum_{m=0}^{n} \binom{2n+1}{m} = A \tag{3}$$

$(1), (2), (3) \Rightarrow A = 2^{2^{2n+1}} - A \Leftrightarrow A = 2^n \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$

2. Από το Δυωνυμικό Θεώρημα έχουμε:

$$(1+x)^n = 1 + \sum_{r=1} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} x^r$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
(1-4x)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\ldots(-\frac{1}{2}-r+1)}{r!}(-4x)^r \\
&= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{4^r(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})(\frac{5}{2})\ldots(\frac{2r-1}{2})}{r!} x^r \\
&= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2^r\left[1\times 3\times 5\times \ldots \times (2r-1)\right]}{r!} x^r \\
&= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\boxed{2^r r!}\left[1\times 3\times 5\times \ldots \times (2r-1)\right]}{r!r!} x^r \\
&= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\boxed{(2\times 4\times 6\times \ldots \times 2r)}\left[1\times 3\times 5\times \ldots \times (2r-1)\right]}{r!r!} x^r \\
&= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(2r)!}{r!r!} x^r \\
&= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \binom{2r}{r} x^r
\end{aligned}$$

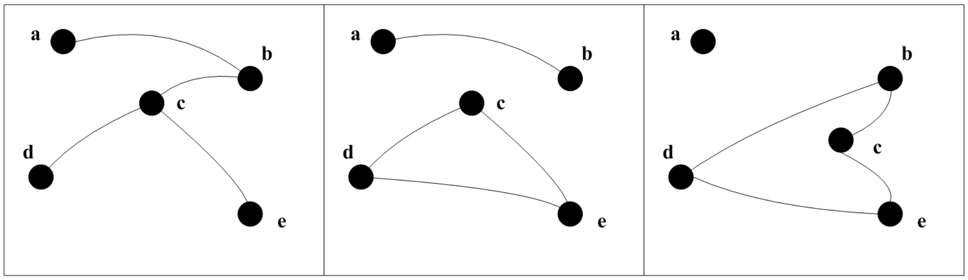
Αφού $\binom{2i}{i}$ είναι ο συντελεστής του όρου x^i στο $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ και $\binom{2t-2i}{t-i}$ είναι ο συντελεστής του όρου x^{t-i} στο $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$
τότε:

$$\sum_{i=0}^{t} \binom{2i}{i}\binom{2t-2i}{t-i}$$ είναι ο συντελεστής του όρου x^t

στο $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = (1-4x)^{-1} = 1 + 4x + (4x)^2 + (4x)^3 + \ldots + (4x)^r + \ldots$

Επομένως έχουμε: $\displaystyle\sum_{i=0}^{t} \binom{2i}{i}\binom{2t-2i}{t-i} = 4^t$

3.



ΚΑΛΗ **ΚΑΛΗ** **ΜΗ - ΚΑΛΗ**

Προφανώς υπάρχουν $\binom{5}{2} = 10$ πιθανοί δρόμοι και άρα $N = |5| = 2^{10}$, γιατί κάθε δρόμος μπορεί να υπάρχει ή να μην υπάρχει.

Για $1 \leq i \leq 5$, ας είναι c_i η συνθήκη ότι το σύστημα των δρόμων απομονώνει τα χωριά a, b, c, d και e αντίστοιχα.

Επομένως η απάντηση είναι:

$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\ \overline{c_5})$

Έχουμε $N(c_1) = 2^6, \quad s_1 = \binom{5}{1}2^6, \quad N(c_1c_2) = 2^3, \quad s_2 = \binom{5}{2}2^3$
$N(c_1c_2c_3) = 2^1, \quad s_3 = \binom{5}{3}2^1, \quad N(c_1c_2c_3c_4) = 2^0, \quad s_4 = \binom{5}{4}2^0$
$N(c_1c_2c_3c_4c_5) = 2^0, \quad s_5 = \binom{5}{5}2^0$

Επομένως:

$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\ \overline{c_5}) = 2^{10} - \binom{5}{1}2^6 + \binom{5}{2}2^3 - \binom{5}{3}2^1 + \binom{5}{4}2^0 - \binom{5}{5}2^0 = 768$