ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2012

1. Προφανώς ισχύει $f(n) = 0$ για n περιττό, αφού συνολικά τα υποσύνολα θα πρέπει να περιέχουν άρτιο αριθμό αντικειμένων (2 αντικείμενα σε κάθε υποσύνολο). Επομένως κάποιο αντικείμενο θα περισσεύει, και άρα δεν υπάρχει διαμέριση που να περιλαμβάνει όλα τα αντικείμενα.
   Στην περίπτωση που το n είναι άρτιο, υποθέτουμε ότι είναι της μορφής $n = 2m$. Θα σχηματίσουμε m υποσύνολα των 2 στοιχείων.
   Οι δυνατές μεταθέσεις των $2m$ αντικειμένων είναι $(2m)!$, όμως δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των αντικειμένων σε κάθε υποσύνολο ούτε η σειρά με την οποία θα σχηματίσουμε τα υποσύνολα. Για να βρούμε τον αριθμό των δυνατών διαμερίσεων, στην πρώτη περίπτωση θα πρέπει να διαιρέσουμε τις μεταθέσεις των $2m$ αντικειμένων με 2^m και στην δεύτερη με $m!$, και επομένως έχουμε:

$$f(2m) = \frac{(2m)!}{2^m m!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2m)}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdots (m)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2m)}{2 \cdot 4 \cdots (2m)} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)$$

$$f(n) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1),\ n \text{ άρτιος}$$

2. Τα χαρτιά είναι διαφορετικά, οπότε μας ενδιαφέρει η σειρά (όχι με την έννοια ότι μας ενδιαφέρει η σειρά που μοιράζονται τα χαρτιά, αλλά με την έννοια ότι μας επιβάλλουν μία διάταξη στους παίκτες). ;ρα πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι εκθετικές γεννήτριες συναρτησεις μιας και οι παίκτες και τα χαρτιά θεωρούνται διακεκριμένες οντότητες.
   - Η ΓΣ για κάθε παίκτη είναι: $\frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = e^x - 1$ (κάθε παράγοντας στο γινόμενο εκφράζει τη δυνατότητα μοιράσματος ενός, δύο, τριών ή περισσοτερων χαρτιών σε κάθε ένα από τους τέσσερεις παίκτες).
     Σημείωση: Επειδή τα χαρτιά είναι 52 και επειδή κάθε παίκτης πρέπει να πάρει τουλάχιστον 1 χαρτί και κανένας παίκτης δεν μπορεί να πάρει περισσότερα από 49 χαρτιά, θα έπρεπε να σταματήσουμε το άθροισμα $\frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$ στον όρο $\frac{x^{49}}{49!}$. Τότε όμως το άθροισμα δε θα ισούται με $e^x - 1$. Επεκτείνοντας το άθροισμα στο άπειρο δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα επειδή οι μεγαλύτερες δυνάμεις του x δεν επηρεάζουν το ζητούμενο συντελεστή.
   - Άρα η ΓΣ για όλους τους παίκτες είναι: $(e^x - 1)^4 = e^{4x} - 4e^{3x} + 6e^{2x} - 4e^x + 1$
   - Η απάντηση στην ερώτηση δίνεται από το συντελεστή του όρου $\frac{x^{52}}{52!}$ που είναι $4^{52} - 4 \cdot 3^{52} + 6 \cdot 2^{52} - 4$

3. Έστω n θετικός ακέραιος. Για $r \geq 0$, έστω $\alpha_{n,r}$ ο αριθμός των τρόπων επιλογής r αντικειμένων με επαναλήψεις από n διαφορετικά αντικείμενα. Για $n \geq 0$ ας είναι $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ το σύνολο αυτών των αντικειμένων και ας θεωρήσουμε το αντικείμενο b_1. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

   · Το αντικείμενο b_1 δεν επιλέγεται ποτέ. Τότε τα r αντικείμενα επιλέγονται από το σύνολο $\{b_2, \ldots, b_n\}$. Αυτό μπορεί να γίνει με $\alpha_{n-1,r}$ τρόπους.

   · Το αντικείμενο b_1 επιλέγεται τουλάχιστον μία φορά. Τότε πρέπει να επιλέξουμε $r-1$ αντικείμενα από το σύνολο $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ έτσι ώστε να είναι δυνατή η επανεπιλογή του b_1. Υπάρχουν $\alpha_{n,r-1}$ τρόποι για να επιτευχθεί αυτό.

   Αφού οι παραπάνω δύο τρόποι επιλογής των r αντικειμένων είναι αμοιβαία αποκλειόμενοι και καλύπτουν όλες τις δυνατές επιλογές έχουμε,

$$\alpha_{n,r} = \alpha_{n-1,r} + \alpha_{n,r-1}$$

   Έστω

$$f(n) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_{n,r} x^r$$

   η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\alpha_{n,0}, \alpha_{n,1}, \ldots$. Από την προηγούμενη σχέση για $n \geq 1, r \geq 1$ παίρνουμε,

$$\begin{gathered}\alpha_{n,r} x^r = \alpha_{n-1,r} x^r + \alpha_{n,r-1} x^r \Longrightarrow \\ \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_{n,r} x^r = \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_{n-1,r} x^r + \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_{n,r-1} x^r\end{gathered}$$

   Λαμβάνοντας υπόψη τις προφανείς αρχικές συνθήκες $\alpha_{n,0} = 1$ για $n \geq 0$ και $\alpha_{0,r} = 0$ για $r > 0$ παίρνουμε,

$$\begin{gathered}f_n - \alpha_{n,0} = f_{n-1} - a_{n-1,0} + x \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_{n,r-1} x^{r-1} \Longrightarrow \\ f_n - 1 = f_{n-1} - 1 + x f_n \Longrightarrow f_n - x f_n = f_{n-1} \Longrightarrow \\ f_n = \tfrac{f_{n-1}}{1-x} \Longrightarrow f_n = \tfrac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n}\end{gathered}$$

   Αφού ο $\alpha_{n,r}$ είναι ο συντελεστής του x^r εις το ανάπτυγμα της f_n θα έχουμε $\alpha_{n,r} = \binom{-n}{r}(-1)^r = \binom{n+r-1}{r}$[1]

4. Αναλύουμε τον αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων: $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$

   – Έστω το σύνολο $S = \{1, 2, ..., 110\}$ με πληθικό αριθμό $|S| = N = 110$ και τις συνθήκες $c_i, (1 \leq i \leq 3)$ που αποτελούν το γεγονός ένας αριθμός $k \in S$ να διαιρείται με το 2, 5 και 11 αντίστοιχα

- Για να μην είναι ένας $k \in S$ σχετικά πρώτος διαιρέσιμος με το 110 πρέπει να μην είναι διαιρέσιμος με κανέναν από τους 2, 5, 11. ;ρα, ο αριθμός των στοιχείων του S, τα οποία δεν ικανοποιούν καμία από τις συνθήκες c_i,$(1 \leq i \leq 3)$ είναι το $\overline{N} = N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}) = N - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) + N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_2c_3) - N(c_1c_2c_3)$.
- c_1: ο αριθμός διαιρείται με 2 με $N(c_1) = 55$
- c_2: ο αριθμός διαιρείται με 5 με $N(c_2) = 22$
- c_3: ο αριθμός διαιρείται με 11 με $N(c_3) = 10$
- Επιπλέον είναι: $N(c_1c_2) = 11$, $N(c_1c_3) = 5$, $N(c_2c_3) = 2$, $N(c_1c_2c_3) = 1$
- Με αντικατάσταση στον αρχικό τύπο προκύπτει $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}) = N - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) + N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_2c_3) - N(c_1c_2c_3) = 110 - 55 - 22 - 10 + 11 + 5 + 2 - 1 = 40$