Τμήμα Μηχανικών Η.Υ. & Πληροφορικής
Εξέταση στο μάθημα ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
Ημερομηνία 2 Φεβρουαρίου 2010

Ενδεικτικές λύσεις

Θέμα 1. (3.5 μονάδες)

1.1 Δίνονται n θέσεις στη σειρά και ζητούμενο είναι να τοποθετηθούν k φοιτητές για να γράφουν εξετάσεις ώστε μεταξύ κάθε δύο φοιτητών να υπάρχει μία κενή θέση ($n \geq 2k-1$). Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Βγάζω φοιτητές και θρανία από την αίθουσα. Δίνω ένα θρανίο σε κάθε φοιτητή (1 τρόπος υπάρχει αφού τα θρανία είναι ίδια, δεσμεύω k). Διατάσσω τους φοιτητές με τα θρανία τους: υπάρχουν $k!$ διαφορετικοί τρόποι αφού οι φοιτητές είναι διαφορετικοί. Τοποθετώ ένα άδειο θρανίο ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι φοιτητών (1 τρόπος αφού τα θρανία είναι ίδια, δεσμεύω $k-1$ θρανία). Μοιράζω τα $n-2k+1$ ίδια θρανία που περίσσεψαν σε $k+1$ διαφορετικές υποδοχές. Αυτό γίνεται με $\binom{k+1+n-2k+1-1}{n-2k+1} = \binom{n-k+1}{n-2k+1}$ τρόπους. Άρα συνολικά υπάρχουν $k! \cdot \binom{n-k+1}{n-2k+1}$ διαφορετικοί τρόποι.

1.2 Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i = 3^n$

Για κάθε x ισχύει: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$. Για $x=2$ η παραπάνω σχέση δίνει: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i = (1+2)^n = 3^n$

Θέμα 2. (3.5 μονάδες)

2.1 Με πόσους τρόπους ένα σύνολο από $r \geq 6$ ίδια αντικείμενα μπορεί να διαχωριστεί σε 3 διαφορετικά υποσύνολα, ανά δύο ξένα μεταξύ τους, ώστε κάθε υποσύνολο να έχει τουλάχιστον 2 αντικείμενα (η ένωση των 3 υποσυνόλων θα περιέχει όλα τα r αντικείμενα);

Για να έχει κάθε ένα από τα 3 υποσύνολα τουλάχιστον δύο αντικείμενα, παίρνουμε 6 αντικείμενα και τα τοποθετούμε από 2 σε κάθε υποσύνολο. Αφού τα αντικείμενα είναι ίδια, δε μάς ενδιαφέρει ποια αντικείμενα θα τοποθετήσουμε σε κάθε υποσύνολο, αρκεί να είναι 2. Ο συνολικός αριθμός των τρόπων να μοιράσουμε τα υπόλοιπα $r-6$ ίδια αντικείμενα προκύπτει ως εξής:

– Σε κάθε αντικείμενο από τα $r-6$ αναθέτουμε ένα υποσύνολο από τα 3.

– Αυτό γίνεται με τους τρόπους που μπορούμε να διαλέξουμε $(r-6)$ αντικείμενα από 3 με επανάληψη: $\binom{r-6+3-1}{r-6} = \binom{r-4}{r-6} = \frac{(r-4)(r-5)}{2}$

Εναλλακτικά: Η γεννήτρια συνάρτηση έχει σα συντελεστές τον αριθμό των τρόπων που μπορούμε να τοποθετήσουμε τα r αντικείμενα στα 3 υποσύνολα, με τον περιορισμό ότι κάθε υποσύνολο έχει τουλάχιστον 2 αντικείμενα.

$$A(x) = (x^2+x^3+x^4+...)(x^2+x^3+x^4+...)(x^2+x^3+x^4+...) =$$

$$x^6(1+x+x^2+...)(1+x+x^2+...)(1+x+x^2+...) = x^6\left(\frac{1}{1-x}\right)^3 =$$

$$x^6(1-x)^{-3} = x^6\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-3}{k}x^k = x^6\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k-1}{k}x^k = x^6\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k-1}{k}x^k$$

Για να βρούμε το συντελεστή του x^r που είναι η απάντηση στην ερώτηση θέτουμε $k=r-6$ και έχουμε $\binom{r-6+3-1}{r-6} = \binom{r-4}{r-6} = \frac{(r-4)(r-5)}{2}$

2.2 Ποιος είναι ο συντελεστής του x^{63} στην παράσταση $(1+x^3+x^7)^{74}$; Οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $3i+7j=63$ είναι οι $(i,j)\in\{(0,9),(7,6),(14,3),(21,0)\}$.

Ισχύει $(s+t)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)s^r t^{n-r}$. Για $s=x^3$ και $t=1+x^7$ έχουμε:

$$(1+x^3+x^7)^{74} = \sum_{r=0}^{74}\binom{74}{r}x^{3\cdot r}(1+x^7)^{74-r} = \sum_{r=0}^{74}\binom{74}{r}x^{3\cdot r}\sum_{k=0}^{74-r}\binom{74-r}{k}x^{7\cdot k}.$$

Για να υπολογίσουμε το συντελεστή του x^{63} πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλα ζεύγη τιμών για k και r τέτοια ώστε $3r+7k=63$, με k και r θετικούς ακέραιους μικρότερους του 63. Αυτά δίνονται από την εκφώνηση: $\{(0,9),(7,6),(14,3),(21,0)\}$. Οπότε ο συντελεστής του x^{63} είναι: $\binom{74}{9}\binom{65}{0}+\binom{74}{6}\binom{68}{7}+\binom{74}{3}\binom{71}{14}+\binom{74}{0}\binom{74}{21}$.

Θέμα 3. (4 μονάδες)

3.1 Υποθέτοντας ότι η βάση της πυραμίδας παραμένει σταθερή και οι συμμετρίες προκύπτουν μετά από περιστροφή της γύρω από τον κατακόρυφο άξονα, με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις πλευρές μιας πυραμίδας με 2 χρώματα;

– $D=\{a,b,c,d\}$, οι πλευρές

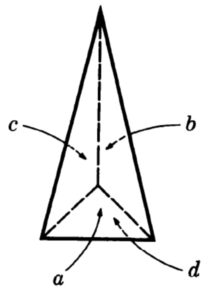
– $R=\{x,y\}$, τα χρώματα με $w(x)=x, w(y)=y$

– Έχουμε τις εξής μεταθέσεις: $\pi_1 = \begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} abcd \\ bcad \end{pmatrix}$ και $\pi_3 = \begin{pmatrix} abcd \\ cabd \end{pmatrix}$, δηλ. $|G|=3$.

– Για την π_1 είναι: x_1^4

– Για την π_2 είναι: $x_1^1x_3^1$

– Για την π_3 είναι: $x_1^1x_3^1$

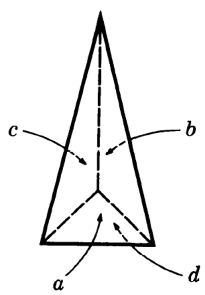


- Οπότε: $P_G = \dfrac{x_1^4 + x_1^1 x_3^1 + x_1^1 x_3^1}{3} = \dfrac{x_1^4 + 2x_1^1 x_3^1}{3}$

- Έχουμε 2 χρώματα με βάρη x, y, οπότε:
- Οπότε: $P_G = \dfrac{(x+y)^4 + 2(x+y)(x^3+y^3)}{3} = x^4+y^4+2x^3y+2x^2y^2+2xy^3$
- Θέτοντας $x = y = 1$ έχουμε: $1+1+2+2+2 = 8$ τρόποι δηλ. διαφορετικοί χρωματισμοί.

Εναλλακτικά: Η βάση της πυραμίδας μπορεί να χρωματιστεί με 2 τρόπους (αφού 2 είναι τα διαθέσιμα χρώματα). Για κάθε έναν από αυτούς τους χρωματισμούς, οι διαφορετικοί χρωματισμοί που μπορούν να λάβουν οι υπόλοιπες πλευρές προκύπτουν ως εξής:

- $D = \{a, b, c\}$, οι πλευρές (εκτός της βάσης)
- $R = \{x, y\}$, τα χρώματα με $w(x) = x, w(y) = y$
- Έχουμε τις εξής μεταθέσεις: $\pi_1 = \begin{pmatrix} abc \\ abc \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} abc \\ bca \end{pmatrix}$ και $\pi_3 = \begin{pmatrix} abc \\ cab \end{pmatrix}$, δηλ. $|G| = 3$.
- Για την π_1 είναι: x_1^3
- Για την π_2 είναι: x_3^1
- Για την π_3 είναι: x_3^1
- Οπότε: $P_G = \dfrac{x_1^3 + x_3^1 + x_3^1}{3} = \dfrac{x_1^3 + 2x_3^1}{3}$



– Έχουμε 2 χρώματα με βάρη x, y, οπότε:

– Οπότε: $P_G = \dfrac{(x+y)^3 + 2(x^3+y^3)}{3}$

– Θέτοντας $x = y = 1$ έχουμε: $\frac{2^3+2\cdot 2}{3} = \frac{12}{3} = 4$ τρόποι δηλ. διαφορετικοί χρωματισμοί για κάθε διαφορετικό χρωματισμό της βάσης. Επομένως, συνολικά υπάρχουν $2 \cdot 4 = 8$ διαφορετικοί χρωματισμοί.

3.2 Με χρήση της Αρχής Εγκλεισμού-Αποκλεισμού να υπολογιστεί το πλήθος των μη αρνητικών λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$, με $x_i \leq 7$, για κάθε i $1 \leq i \leq 4$.

Έστω S το σύνολο όλων των λύσεων της εξίσωσης. $|S| = N = \dbinom{15+4-1}{15} = \dbinom{18}{15}$ Γιατί; Ισούται με τους τρόπους που μπορώ να τοποθετήσω 15 ίδια αντικείμενα (15 μονάδες) σε 4 διαφορετικές υποδοχές (τις μεταβλητές x_1, x_2, x_3, x_4)

– c_1: μια λύση (x_1, x_2, x_3, x_4) της εξίσωσης ικανοποιεί τη συνθήκη $x_1 > 7$

– c_2: μια λύση (x_1, x_2, x_3, x_4) της εξίσωσης ικανοποιεί τη συνθήκη $x_2 > 7$

– c_3: μια λύση (x_1, x_2, x_3, x_4) της εξίσωσης ικανοποιεί τη συνθήκη $x_3 > 7$

– c_4: μια λύση (x_1, x_2, x_3, x_4) της εξίσωσης ικανοποιεί τη συνθήκη $x_4 > 7$

Αυτό που ζητάμε είναι το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4})$. Θέλω να φτιάξω μια εξίσωση χωρίς περιορισμούς. Αν ισχύει η c_1 τότε ξέρω ότι $x_1 > 7$ ή ισοδύναμα $x_1 \geq 8$, δηλ. η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η x_1 είναι 8. Λύνω την εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ και από κάθε λύση που θα υπολογίσω παίρνω μία λύση για την αρχική εξίσωση προσθέτοντας στην τιμή του x_1 το 8. Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ είναι $\binom{7+4-1}{7} = \binom{10}{7}$. Επομένως, τόσες είναι και οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης που ικανοποιούν τη συνθήκη c_1. Τα ίδια ισχύουν και για τις συνθήκες c_2, c_3, c_4. Για να υπολογίσω τα $N(c_1c_2) = N(c_1c_3) = N(c_1c_4) = N(c_2c_3) = N(c_2c_4) = N(c_3c_4)$ ακολουθώ ανάλογη διαδικασία. Θέλω να φτιάξω μια εξίσωση χωρίς περιορισμούς. Αν ισχύει η c_1c_2 τότε ξέρω ότι $x_1 > 7, x_2 > 7$ ή ισοδύναμα $x_1 \geq 8, x_2 \geq 8$, δηλ. η μικρότερη τιμή που μπορούν να πάρουν οι x_1, x_2 είναι 8. Τότε όμως η εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$ είναι αδύνατη και το ίδιο ισχύει για οποιοδήποτε άλλο ζεύγος 2 μεταβλητών, δηλ. $N(c_1c_2) = N(c_1c_3) = N(c_1c_4) = N(c_2c_3) = N(c_2c_4) = N(c_3c_4) = 0$. Όμοια, είναι $N(c_1c_2c_3) = N(c_1c_2c_4) = N(c_2c_3c_4) = 0$ αφού αν 3 από τις μεταβλητές έχουν τιμή τουλάχιστον 8 η εξίσωση είναι πάλι αδύνατη. Όμοια, $N(c_1c_2c_3c_4) = 0$ αφού αν και οι 4 μεταβλητές έχουν τιμή τουλάχιστον 8 η εξίσωση είναι πάλι αδύνατη. Συνολικά: $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = N - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) - N(c_4) + N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_1c_4) + N(c_2c_3) + N(c_2c_4) + N(c_3c_4) - N(c_1c_2c_3) - N(c_1c_2c_4) - N(c_2c_3c_4) + N(c_1c_2c_3c_4) = \binom{18}{15} - \binom{4}{1}\binom{10}{7} + 0 - 0 + 0 = 816 - 480 = 336$