Τμήμα Μηχανικών Η.Υ. & Πληροφορικής
Εξέταση στο μάθημα ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
Ημερομηνία 15 Φεβρουαρίου 2011

Ενδεικτικές λύσεις

1 Με πόσους τρόπους μπορούν να διανεμηθούν $2n+1$ θέσεις ενός συνεδριακού κέντρου σε τρεις ομάδες, ώστε ο συνασπισμός οποιωνδήποτε δύο ομάδων να τους εξασφαλίσει πλειοψηφία; Τόσο οι θέσεις όσο και οι σύνεδροι της κάθε ομάδας δε διακρίνονται μεταξύ τους.

– Δίνεται ότι: '*τόσο οι θέσεις όσο και οι σύνεδροι της κάθε ομάδας δε διακρίνονται μεταξύ τους* '. Επομένως, διανομές των θέσεων που προκύπτουν η μία από την άλλη με ανταλλαγή θέσεων συνέδρων μεταξύ τους, ή προσώπων συνέδρων, χωρίς αλλαγή του αριθμού των συνέδρων της κάθε ομάδας, δε μετράνε ως διαφορετικές. Έτσι, το πρόβλημα μετατρέπεται σε πρόβλημα τοποθέτησης μη διακεκριμένων (δηλ., ίδιων) αντικειμένων σε διακεκριμένες υποδοχές (τις διαφορετικές ομαδες).

– Ιδέα: Αν μία ομάδα έχει $n+1$ θέσεις, τότε οι δύο άλλες δε μπορούν ποτέ να έχουν πλειοψηφία. Άρα για να απαντήσουμε στην ερώτηση πρέπει

1. να βρούμε με πόσους τρόπους μπορούν να διανεμηθούν $2n+1$ θέσεις σε τρεις ομάδες χωρίς περιορισμό, και
   * Τρόποι τοποθέτησης $2n+1$ ίδιων αντικειμένων σε 3 υποδοχές: $\binom{2n+1+3-1}{2n+1} = \binom{2n+3}{2n+1}$
2. να αφαιρέσουμε από αυτούς εκείνους τους τρόπους που δίνουν τουλάχιστον $n+1$ θέσεις σε μία μόνο ομάδα
   * Δίνουμε $n+1$ θέσεις σε μία από τις ομάδες οπότε μένουν για διανομή $2n+1-n-1=n$ θέσεις
   * Τρόποι τοποθέτησης n ίδιων αντικειμένων σε 3 υποδοχές: $\binom{n+3-1}{n} = \binom{n+2}{n}$
   * Συνολικά, αφού υπάρχουν τρεις ομάδες: $3 \cdot \binom{n+2}{n}$

Οπότε οι ζητούμενοι τρόποι είναι: $\binom{2n+3}{2} - 3 \cdot \binom{n+2}{2} = \frac{n}{2} \cdot (n+1)$

Θέμα 2. (3.5 μονάδες)

2 Υπολογίστε, (α) με απλή συνδυαστική και (β) με χρήση γεννητριών συναρτήσεων, με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε r διαφορετικά αντικείμενα που επιλέγονται από απεριόριστο αριθμό αντικειμένων n διαφορετικών ειδών.

(α) με απλή συνδυαστική

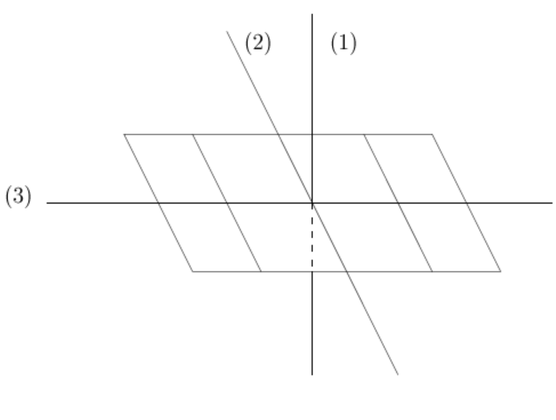
- Έχουμε r θέσεις: Για την αριστερότερη από αυτές υπάρχουν n διαφορετικές επιλογές: όσες και τα διαφορετικά είδη των διαθέσιμων αντικειμένων.
- Για τη διπλανή της θέση υπάρχει πάλι ο ίδιος αριθμός επιλογών, αφού διατίθεται απεριόριστος αριθμός αντικειμένων από κάθε διαφορετικό είδος. κ.ο.κ.
- Άρα συνολικά υπάρχουν $\underbrace{n \cdot n \cdot n ... \cdot n}_{r} = n^r$ τρόποι να πραγματοποιηθεί το ζητούμενο.

(β) με χρήση γεννητριών συναρτήσεων

- Θέλουμε διατάξεις. Οπότε η ΓΣ για κάθε είδος αντικειμένων είναι: $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$
- Επομένως, η ΓΣ για όλα τα n είδη αντικειμένων είναι: $\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...\right)^n = (e^x)^n = e^{xn}$
- Ισχύει ότι: $e^{\alpha x} = \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} \alpha^r \frac{x^r}{r!}$, οπότε:
- $e^{xn} = \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} n^r \frac{x^r}{r!}$
- Το ζητούμενο πλήθος διατάξεων δίνεται από το συντελεστή του $\frac{x^r}{r!}$ στο παραπάνω ανάπτυγμα που είναι n^r.

Θέμα 3. (4 μονάδες)

3.1 Έχουμε 'σκακιέρες' διαστάσεων 2×4 που έχουν άσπρα και μαύρα τετράγωνα. Πόσες διαφορετικές από αυτές υπάρχουν με 5 μαύρα και 3 άσπρα τετράγωνα;



- Έστω G το σύνολο μεταθέσεων που αντιστοιχούν σε όλες τις περιστροφές της σκακιέρας. Υπάρχουν 4 μεταθέσεις στο G που ομαδοποιούνται στις παρακάτω 4 κατηγορίες:

1. Ταυτοτική μετάθεση. Κυκλική αναπαράσταση: x_1^8
2. Η μετάθεση που αντιστοιχεί σε περιστροφή 180^o της σκακιέρας γύρω από άξονα ((1) στο σχήμα) που είναι κάθετος στη σκακιέρα και διέρχεται από το κέντρο της. Κυκλική αναπαράσταση: x_2^4
3. Η μετάθεση που αντιστοιχεί σε περιστροφή 180^o γύρω από τον οριζόντιο άξονα ((3) στο σχήμα) που κόβει στη μέση τις δύο γραμμές της σκακιέρας. Κυκλική αναπαράσταση: x_2^4
4. Η μετάθεση που αντιστοιχεί σε περιστροφή 180^o γύρω από τον οριζόντιο άξονα ((2) στο σχήμα) που κόβει στη μέση τις 4 στήλες της σκακιέρας. Κυκλική αναπαράσταση: x_2^4

– Επομένως, ο δείκτης κύκλων του συνόλου μεταθέσεων G είναι: $P_G = \frac{1}{4}(x_1^8 + 3x_2^4)$

– Αφού έχουμε δύο χρώματα, ο κατάλογος προτύπων είναι: $P_G = \frac{1}{4}((x + y)^8 + 3(x^2 + y^2)^4) = \frac{1}{4}[\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} x^k y^{8-k} + 3 \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} x^{2k} y^{8-2k}]$

– Αναζητούμε το συντελεστή του όρου x^5y^3 στην παραπάνω παράσταση. Κάνοντας πράξεις, αυτός προκύπτει ότι είναι: $\frac{1}{4}[\binom{8}{5} + 3 \cdot 0] = 14$.

3.2 Χρησιμοποιώντας την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού, υπολογίστε πόσοι ακέραιοι μεταξύ 1 και 70 είναι σχετικά πρώτοι με το 70; (Σχετικά πρώτοι είναι δύο αριθμοί με μόνο κοινό διαιρέτη τη μονάδα.)

Είναι $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$

– Έστω $S = \{1, 2, ..., 70\}$. $|S| = N = 70$
– c_1: ο αριθμός διαιρείται με 2 με $N(c_1) = 35$
– c_2: ο αριθμός διαιρείται με 5 με $N(c_2) = 14$
– c_3: ο αριθμός διαιρείται με 7 με $N(c_3) = 10$
– Αυτό που ζητάμε είναι το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3})$.
– Επιπλέον είναι: $N(c_1c_2) = 7, N(c_1c_3) = 5, N(c_2c_3) = 2, N(c_1c_2c_3) = 1$
– $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_2}) = N - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) + N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_2c_3) - N(c_1c_2c_3) = 70 - 35 - 14 - 10 + 7 + 5 + 2 - 1 = 24$