ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2012

1. Υπάρχουν $(n-1)$ θέσεις μεταξύ των ψηφίων σε μία τέτοια λέξη. Καλούμε θέση - διακόπτη μία θέση στην οποία τα ψηφία αλλάζουν είτε από 0 σε 1 ή από 1 σε 0.

   Για μία λέξη της επιθυμητής μορφής υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

   1. Η λέξη να αρχίζει και να τελειώνει με 1.
      Σε αυτήν τη λέξη πρέπει να υπάρχουν $2m$ θέσεις - διακόπτες (με κάθε δεύτερη θέση - διακόπτη να δίνει ένα 01) και επομένως υπάρχουν $\binom{n-1}{2m}$ τέτοιες λέξεις.
   2. Η λέξη να αρχίζει από 1 και να τελειώνει σε 0.
      Θα υπάρχουν $2m+1$ θέσεις - διακόπτες και επομένως $\binom{n-1}{2m+1}$ τέτοιες λέξεις.
   3. Η λέξη να αρχίζει από 0 και να τελειώνει σε 1.
      Θα υπάρχουν $2m-1$ θέσεις - διακόπτες και επομένως $\binom{n-1}{2m-1}$ τέτοιες λέξεις.
   4. Η λέξη να αρχίζει από 0 και να τελειώνει σε 0.
      Θα υπάρχουν $2m$ θέσεις - διακόπτες και επομένως $\binom{n-1}{2m}$ τέτοιες λέξεις.

   Άρα έχουμε $\binom{n-1}{2m}+\binom{n-1}{2m+1}+\binom{n-1}{2m-1}+\binom{n-1}{2m}=\binom{n}{2m+1}+\binom{n}{2m}=\binom{n+1}{2m+1}$ τέτοιες λέξεις.

2. Ας είναι:

   $$\begin{gathered} a_n \text{ - ο αριθμός τέτοιων λέξεων που τελειώνουν σε 0.} \\ b_n \text{ - ο αριθμός τέτοιων λέξεων που τελειώνουν σε 1.} \\ c_n \text{ - ο αριθμός τέτοιων λέξεων που τελειώνουν σε 2.} \\ x_n = a_n + b_n + c_n \end{gathered}$$

   Αλλάζοντας τα 0 και 2 παίρνουμε μία αντιστοιχία 1-σε-1 μεταξύ του συνόλου των λέξεων (της ζητούμενης μορφής) που τελειώνουν σε 0 και του συνόλου των λέξεων (της ζητούμενης μορφής) που τελειώνουν σε 2. Επομένως έχουμε:

   $$a_n = c_n$$

   και

   $$x_n = 2a_n + b_n$$

   με

   $$a_1 = b_1 = 1$$

   και

$$a_{n+1} = a_n + b_n$$
$$b_{n+1} = a_n + b_n + c_n = 2a_n + b_n = x_n$$

Επομένως:

$$b_{n+2} = 2a_{n+1} + b_{n+1} = 2(a_n + b_n) + b_{n+1} = (2a_n + b_n) + b_n + b_{n+1} =$$
$$= b_{n+1} + b_n + b_{n+1} = 2b_{n+1} + b_n$$

Άρα έχουμε τη σχέση αναδρομής:

$$b_{n+2} - 2b_{n+1} - b_n = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \quad \text{και} \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

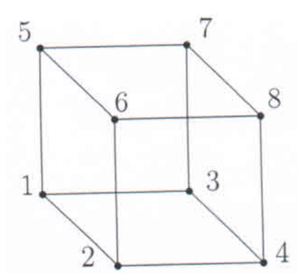
Επομένως:

$$b_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n$$
$$A = B = 1/2$$
$$b_n = \tfrac{1}{2}\Big((1+\sqrt{2})^n + 1 - \sqrt{2})^n\Big)$$

Επομένως ο αριθμός των λέξεων της κατάλληλης μορφής είναι:

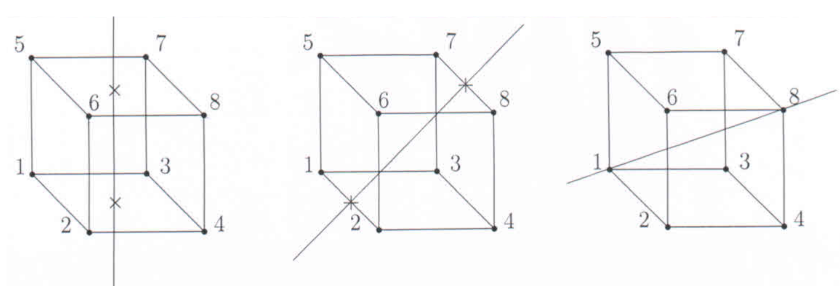
$$x_n = b_{n+1} = \tfrac{1}{2}\Big((1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\Big)$$

3. Το σύνολο G των κατάλληλων περιστροφών του κύβου προκύπτει ως εξής:



κορυφές	πλευρές
1, 2, 3, 4	a
1, 2, 5, 6	b
1, 3, 5, 7	c
3, 4, 7, 8	d
2, 4, 6, 8	e
5, 6, 7, 8	f

Περιγράφουμε τις κατάλληλες περιστροφές του κύβου με τις μεταθέσεις των a, b, c, d, e, f. Μαζί με την ταυτοτική $(a), (b), (c), (d), (e), (f)$ υπάρχουν 3 ειδών μεταθέσεις:



1. Περιστροφές γύρω από τον άξονα που περνάει από τα κέντρα 2 απέναντι πλευρών (υπάρχουν 3 επιλογές για το ζευγάρι των πλευρών και επομένως 3 μη-ταυτοτικές περιστροφές). Δύο είναι του τύπου $(bcde)$ και μία του τύπου $(bd)(ce)$.
2. Περιστροφές κατά π γύρω από άξονα που περνάει από τα μέσα δύο διαγωνίως αντιθέτων ακμών (υπάρχουν 6 τέτοια ζευγάρια που δίνουν μεταθέσεις του τύπου $(ab)(ce)(df)$).
3. Περιστροφές κατά $2\pi/3$ και $4\pi/3$ γύρω από άξονα δύο διαγωνίως αντιθέτων κορυφών (π.χ. 1 με 8).
   Υπάρχουν 4 τρόποι να διαλέξεις το ζευγάρι των κορυφών και δύο περιστροφές για καθένα που δίνουν 8 συμμετρίες του τύπου $(abc)(def)$.

Ο παρακάτω πίνακας δίνει τον αριθμό για κάθε τύπο συμμετρίας, το σχετικό πολυώνυμο σε c_1, c_2 και c_3 και το συντελεστή $c_1^2c_2^2c_3^2$.

$\sigma \in G$	s	πολυώνυμο	συντελεστής του $c_1^2c_2^2c_3^2$
$(a)(b)(c)(d)(e)(f)$	1	$(c_1+c_2+c_3)^6$	$\binom{6}{2}\binom{4}{2}=90$
$(a)(bcde)(f)$	6	$6(c_1+c_2+c_3)^2(c_1^4+c_2^4+c_3^4)$	0
$(a)(bd)(ce)(f)$	3	$3(c_1+c_2+c_3)^2(c_1^2+c_2^2+c_3^2)^2$	18
$(ab)(ce)(df)$	6	$6(c_1^2+c_2^2+c_3^2)^3$	36
$(abc)(def)$	8	$8(c_1^3+c_2^3+c_3^3)^2$	0
	24		144

Το αποτέλεσμα επομένως είναι $\frac{144}{24} = 6$ διαφορετικοί χρωματισμοί.