Τμήμα Μηχανικών Η.Υ. & Πληροφορικής
Εξέταση στο μάθημα ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
Ημερομηνία 31 Μαΐου 2011

Ενδεικτικές λύσεις

Θέμα 1

1.1 Πόσες δυαδικές ακολουθίες 32 ψηφίων έχουν ακριβώς 7 άσσους;

‘δυαδικές ακολουθίες των 32 θέσεων με 7 ακριβώς άσσους’

$$\Leftrightarrow$$

‘επιλέγω 7 από τις 32 θέσεις για να φιλοξενήσουν τους άσσους και βάζω 0 σε όλες τις υπόλοιπες’

Υπάρχουν τόσοι τρόποι να το κάνω αυτό όσοι είναι οι τρόποι να διαλέξω 7 από 32 στοιχεία, δηλ.:

$C(32,7) = \dfrac{32!}{7!25!} = \dfrac{26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 3.365.856$

1.2 Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $2, 7, 29, 133, ..., 2^n + 5^n, ...$

– $A(x) = 2^0 + 5^0 + (2^1 + 5^1)x + (2^2 + 5^2)x^2 + ... =$

$(2^0 + 2x + 2^2x^2 + ...) + (5^0 + 5x + 2^5x^2 + ...)$

$[(2x)^0 + (2x)^1 + (2x)^2 + ...] + [(5x)^0 + (5x)^1 + (5x)^2 + ...] =$

$\dfrac{1}{1-2x} + \dfrac{1}{1-5x} = \dfrac{1-5x+1-2x}{1-7x+10x^2} = \dfrac{2-7x}{1-7x+10x^2}$

Θέμα 2

2.1 Χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις, υπολογίστε με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν τα 52 (διακεκριμένα) χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 (διακεκριμένους) παίκτες όταν κάθε παίκτης πρέπει να πάρει τουλάχιστον ένα χαρτί.

– Τα χαρτιά είναι διαφορετικά, οπότε μάς ενδιαφέρει η σειρά (όχι με την έννοια ότι μας ενδιαφέρει η σειρά που μοιράζονται τα χαρτιά, αλλά με την έννοια ότι επιβάλλουν μία διάταξη στους παίκτες). Άρα πρέπει να χρησιμοποιηθούν εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις.

- Η ΓΣ για κάθε παίκτη είναι: $\frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = e^x - 1$
  Σημείωση: Επειδή τα χαρτιά είναι 52 και επειδή κάθε παίκτης πρέπει να πάρει τουλάχιστον 1 χαρτί και κανένας παίκτης δε μπορεί να πάρει περισσότερα από 49 χαρτιά, θα έπρεπε να σταματήσουμε το άθροισμα $\frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$ στον όρο $\frac{x^{49}}{49!}$. Τότε όμως το άθροισμα δε θα ισούταν με $e^x - 1$. Επεκτείνοντας το άθροισμα στο άπειρο δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα επειδή οι μεγαλύτερες δυνάμεις του x δεν επηρεάζουν το ζητούμενο συντελεστή.
- Άρα η ΓΣ για όλους τους παίκτες είναι: $(e^x - 1)^4 = e^{4x} - 4e^{3x} + 6e^{2x} - 4e^x + 1$
- Η απάντηση στην ερώτηση δίνεται από το συντελεστή του όρου $\frac{x^{52}}{52!}$ που είναι: $4^{52} - 4 \cdot 3^{52} + 6 \cdot 2^{52} - 4$

2.2 Μεταξύ $2n$ αντικειμένων τα n είναι ίδια. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε n από τα δοσμένα $2n$ αντικείμενα;

Μπορούμε να διαλέξουμε n αντικείμενα από τα $2n$ ως εξής:

- διαλέγω με 1 τρόπο n ίδια αντικείμενα και με $\binom{n}{0}$ τρόπους 0 από τα διαφορετικά n αντικείμενα,
- διαλέγω με 1 τρόπο $n-1$ ίδια αντικείμενα και με $\binom{n}{1}$ τρόπους 1 από τα διαφορετικά n αντικείμενα,
- διαλέγω με 1 τρόπο $n-2$ ίδια αντικείμενα και με $\binom{n}{2}$ τρόπους 2 από τα διαφορετικά n αντικείμενα,
- κ.ο.κ.
- διαλέγω με 1 τρόπο 0 ίδια αντικείμενα και με $\binom{n}{n}$ τρόπους n από τα διαφορετικά n αντικείμενα.

Άρα συνολικά: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$ τρόπους.

Εναλλακτική λύση:

- Θεωρούμε n διαδοχικές θέσεις όπου κάθε μία αντιπροσωπεύει ένα από τα n διαφορετικά αντικείμενα.
- Για κάθε μία από αυτές τις θέσεις έχουμε 2 επιλογές: να επιλέξουμε το αντικείμενό της ή να μην το επιλέξουμε και να βάλουμε στη θέση του ένα από τα n ίδια αντικείμενα.
- Άρα συνολικά: 2^n τρόποι.

Θέμα 3

3.1 Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Pólya, υπολογίστε το πλήθος των διαφορετικών βραχιολιών με 3 χάντρες, λευκές και κόκκινες. Ισοδύναμα είναι βραχιόλια που προκύπτουν από εναλλαγή των άκρων τους.

- $D = \{1, 2, 3\}$, οι χάντρες
- $R = \{b, y\}$, τα χρώματα με $w(b) = b, w(y) = y$

- Έχουμε τις εξής μεταθέσεις: $\pi_1 = \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}$ και $\pi_2 = \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}$, δηλ. $|G| = 2$.
- Στη μετάθεση π_1 υπάρχουν 3 κύκλοι μήκους 1, δηλ. x_1^3
- Στη μετάθεση π_2 υπάρχουν 1 κύκλος μήκους 1 και 1 κύκλος μήκους 2, δηλ. $x_1^1 x_2^1$
- Οπότε: $P_G = \dfrac{x_1^3 + x_2 x_1}{2}$
- Έχουμε 2 χρώματα με βάρη b, y, οπότε:
- Οπότε: $P_G = \dfrac{(b+y)^3 + (b^2+y^2)(b+y)}{2} = b^3 + 2b^2y + 2by^2 + y^3$
- Θέτοντας $b = y = 1$ έχουμε: $1 + 2 + 2 + 1 = 6$ τρόποι δηλ. διαφορετικά βραχιόλια.

3.2 Χρησιμοποιώντας την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού, υπολογίστε πόσοι ακέραιοι μεταξύ 1 και 110 είναι σχετικά πρώτοι με το 110; (Σχετικά πρώτοι είναι δύο αριθμοί με μόνο κοινό διαιρέτη τη μονάδα.)

Είναι $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$

- Έστω $S = \{1, 2, ..., 110\}$. $|S| = N = 110$
- c_1: ο αριθμός διαιρείται με 2 με $N(c_1) = 55$
- c_2: ο αριθμός διαιρείται με 5 με $N(c_2) = 22$
- c_3: ο αριθμός διαιρείται με 11 με $N(c_3) = 10$
- Αυτό που ζητάμε είναι το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3})$.
- Επιπλέον είναι: $N(c_1c_2) = 11, N(c_1c_3) = 5, N(c_2c_3) = 2, N(c_1c_2c_3) = 1$
- $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_2}) = N - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) + N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_2c_3) - N(c_1c_2c_3) = 110 - 55 - 22 - 10 + 11 + 5 + 2 - 1 = 40$

Καλή επιτυχία!
Λευτέρης Κυρούσης
Εύη Παπαϊωάννου