Τμήμα Μηχανικών Η.Υ. & Πληροφορικής
Εξέταση στο μάθημα ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
Ημερομηνία 30 Αυγούστου 2010

Ενδεικτικές λύσεις

1 Μεταξύ $2n$ αντικειμένων τα n είναι ίδια. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε n από τα δοσμένα $2n$ αντικείμενα;

Μπορούμε να διαλέξουμε n αντικείμενα από τα $2n$ ως εξής:

- διαλέγω με 1 τρόπο n ίδια αντικείμενα και με $\binom{n}{0}$ τρόπους 0 από τα διαφορετικά n αντικείμενα,
- διαλέγω με 1 τρόπο $n-1$ ίδια αντικείμενα και με $\binom{n}{1}$ τρόπους 1 από τα διαφορετικά n αντικείμενα,
- διαλέγω με 1 τρόπο $n-2$ ίδια αντικείμενα και με $\binom{n}{2}$ τρόπους 2 από τα διαφορετικά n αντικείμενα,
- κ.ό.κ.
- διαλέγω με 1 τρόπο 0 ίδια αντικείμενα και με $\binom{n}{n}$ τρόπους n από τα διαφορετικά n αντικείμενα.

Άρα συνολικά με: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$ τρόπους.

Εναλλακτική λύση:

- Θεωρούμε n διαδοχικές θέσεις: κάθε μία αντιπροσωπεύει ένα από τα n διαφορετικά αντικείμενα.
- Για κάθε μία από αυτές τις θέσεις έχουμε 2 επιλογές: να επιλέξουμε το αντικείμενό της ή να μην το επιλέξουμε και να βάλουμε στη θέση του ένα από τα n ίδια αντικείμενα.
- Άρα συνολικά: 2^n τρόποι.

Θέμα 2. (3.5 μονάδες)

2.1 Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε r διαφορετικά αντικείμενα που επιλέγονται από απεριόριστο αριθμό αντικειμένων n διαφορετικών ειδών;

- Αφού ζητείται πλήθος διατάξεων, χρησιμοποιούμε εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις. Επομένως, η (εκθετιική) γεννήτρια συνάρτηση για κάθε αντικείμενο είναι: $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$
- Επομένως, η γεννήτρια συνάρτηση για όλα τα n αντικείμενα είναι: $\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)^n=(e^x)^n=e^{xn}$

- Ισχύει ότι: $e^{\alpha x} = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha^r \frac{x^r}{r!}$, οπότε: $e^{nx} = \sum_{r=0}^{\infty} n^r \frac{x^r}{r!}$
- Το ζητούμενο πλήθος διατάξεων δίνεται από το συντελεστή του $\frac{x^r}{r!}$ στο παραπάνω ανάπτυγμα που είναι n^r.

Εναλλακτική λύση:

- Για το πρώτο αντικείμενο έχουμε n επιλογές για το είδος του.
- Το ίδιο για το δεύτερο έως και το r-οστό αντικείμενο.
- Άρα, συνολικά n^r διατάξεις.

2.2 Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει: $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+... = \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+...$

- Για κάθε x ισχύει: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$
- Για $x=-1$ η παραπάνω σχέση δίνει: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i = 0$
- Αναπτύσσουμε το άθροισμα στο αριστερό μέρος: $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\binom{n}{4}-\binom{n}{5}+...=0 \Leftrightarrow$
  $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+...=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+...$

Θέμα 3. (4 μονάδες)

3.1 Ποιο είναι το πλήθος των διαφορετικών βραχιολιών με 3 χάντρες, μπλε και κίτρινες; Βραχιόλια που προκύπτουν από εναλλαγή των χαντρών Α και Β (με τη Γ ακίνητη) θεωρούνται ισοδύναμα, όπου Α, Β και Γ είναι οι τρεις χάντρες.

$D = \{1,2,3\}$, οι χάντρες

$R = \{b, y\}$, τα χρώματα με $w(b) = b, w(y) = y$

Αφού ισοδύναμα είναι βραχιόλια που προκύπτουν από εναλλαγή των άκρων τους, υπάρχουν οι εξής μεταθέσεις: $\pi_1 = \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}$ και $\pi_2 = \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}$, δηλ. $|G| = 2$.

Στη μετάθεση π_1 υπάρχουν 3 κύκλοι μήκους 1, δηλ. x_1^3.
Στη μετάθεση π_2 υπάρχουν 1 κύκλος μήκους 1 και 1 κύκλος μήκους 2, δηλ. $x_1^1 x_2^1$.
Οπότε: $P_G = \frac{x_1^3 + x_2 x_1}{2}$

Έχουμε 2 χρώματα με βάρη b, y, οπότε: $P_G = \frac{(b+y)^3 + (b^2+y^2)(b+y)}{2} = b^3 + 2b^2y + 2by^2 + y^3$.
Θέτοντας $b = y = 1$ έχουμε: $1+2+2+1 = 6$ τρόπους δηλ. διαφορετικά βραχιόλια.

3.2 Χρησιμοποιώντας την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού, υπολογίστε πόσες λέξεις των n συμβόλων από το αλφάβητο $\{0, 1, 2\}$ υπάρχουν με ένα τουλάχιστον 0, ένα τουλάχιστον 1 και ένα τουλάχιστον 2 ;

Έστω S το σύνολο όλων των πιθανών μεταθέσεων των στοιχείων 0,1,2 σε n θέσεις. $|S| = N = 3^n$

c_1: η λέξη δεν περιέχει κανένα 0, $N(c_1) = 2^n$
c_2: η λέξη δεν περιέχει κανένα 1, $N(c_2) = 2^n$
c_3: η λέξη δεν περιέχει κανένα 2, $N(c_3) = 2^n$
Αυτό που ζητάμε είναι το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3})$.

$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_2}) = N - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) + N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_2c_3) - N(c_1c_2c_3) = 3^n - 2^n - 2^n - 2^n + 1 + 1 + 1 - 0 = 3(3^{n-1} - 2^n + 1)$