Τμήμα Μηχανικών Η.Υ. & Πληροφορικής
Εξέταση στο μάθημα ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
Ημερομηνία 29 Αυγούστου 2011
Εξετάστρια: Δρ. Ε. Παπαϊωάννου (ΠΔ407/80)

Ενδεικτικές λύσεις

Θέμα 1

1.1 Με πόσους τρόπους μπορούν να διαταχθούν r διαφορετικά αντικείμενα που επιλέγονται από απεριόριστο αριθμό αντικειμένων n διαφορετικών ειδών;

- Αφού ζητείται πλήθος <u>διατάξεων</u>, χρησιμοποιούμε <u>εκθετικές</u> γεννήτριες συναρτήσεις. Επομένως, η (εκθετική) γεννήτρια συνάρτηση για κάθε αντικείμενο είναι: $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$
- Επομένως, η γεννήτρια συνάρτηση για όλα τα n αντικείμενα είναι: $\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)^n = (e^x)^n = e^{xn}$
- Ισχύει ότι: $e^{\alpha x} = \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} \alpha^r \frac{x^r}{r!}$, οπότε: $e^{nx} = \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} n^r \frac{x^r}{r!}$
- Το ζητούμενο πλήθος διατάξεων δίνεται από το συντελεστή του $\frac{x^r}{r!}$ στο παραπάνω ανάπτυγμα που είναι n^r.

Εναλλακτική λύση:

- Για το πρώτο αντικείμενο έχουμε n επιλογές για το είδος του.
- Το ίδιο για το δεύτερο έως και το r-οστό αντικείμενο.
- Άρα, συνολικά n^r διατάξεις.

1.2 Αποδείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i = 3^n$

Για κάθε x ισχύει: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$. Για $x = 2$ η παραπάνω σχέση δίνει: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i = (1+2)^n = 3^n$

Θέμα 2

Ποιος είναι ο συντελεστής του x^{63} στην παράσταση $(1+x^3+x^7)^{74}$; Οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $3i+7j=63$ είναι οι $(i,j)\in\{(0,9),(7,6),(14,3),(21,0)\}$.

Ισχύει $(s+t)^n=\sum_{r=0}^{n} C(n,r)s^r t^{n-r}$. Για $s=x^3$ και $t=1+x^7$ έχουμε:

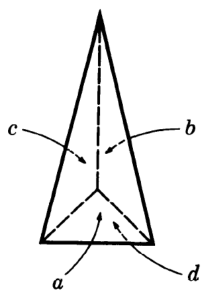
$$(1+x^3+x^7)^{74}=\sum_{r=0}^{74}\binom{74}{r}x^{3\cdot r}(1+x^7)^{74-r}=\sum_{r=0}^{74}\binom{74}{r}x^{3\cdot r}\sum_{k=0}^{74-r}\binom{74-r}{k}x^{7\cdot k}.$$

Για να υπολογίσουμε το συντελεστή του x^{63} πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλα ζεύγη τιμών για k και r τέτοια ώστε $3r+7k=63$, με k και r θετικούς ακέραιους μικρότερους του 63. Αυτά δίνονται από την εκφώνηση: $\{(0,9),(7,6),(14,3),(21,0)\}$. Οπότε ο συντελεστής του x^{63} είναι: $\binom{74}{9}\binom{65}{0}+\binom{74}{6}\binom{68}{7}+\binom{74}{3}\binom{71}{14}+\binom{74}{0}\binom{74}{21}$.

Θέμα 3

3.1 Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Pólya, υπολογίστε το πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών των πλευρών μιας πυραμίδας με 2 χρώματα. Υποθέστε ότι η βάση της πυραμίδας παραμένει σταθερή και οι συμμετρίες προκύπτουν μετά από περιστροφή της γύρω από τον κατακόρυφο άξονα.

- $D=\{a,b,c,d\}$, οι πλευρές
- $R=\{x,y\}$, τα χρώματα με $w(x)=x, w(y)=y$
- Έχουμε τις εξής μεταθέσεις: $\pi_1=\begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}$, $\pi_2=\begin{pmatrix} abcd \\ bcad \end{pmatrix}$ και $\pi_3=\begin{pmatrix} abcd \\ cabd \end{pmatrix}$, δηλ. $|G|=3$.
- Για την π_1 είναι: x_1^4
- Για την π_2 είναι: $x_1^1x_3^1$
- Για την π_3 είναι: $x_1^1x_3^1$
- Οπότε: $P_G=\dfrac{x_1^4+x_1^1x_3^1+x_1^1x_3^1}{3}=\dfrac{x_1^4+2x_1^1x_3^1}{3}$

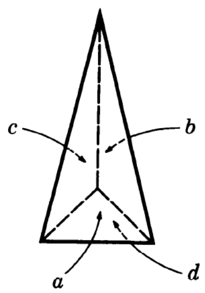


- Έχουμε 2 χρώματα με βάρη x,y, οπότε:

- Οπότε: $P_G = \dfrac{(x+y)^4 + 2(x+y)(x^3+y^3)}{3} = x^4+y^4+2x^3y+2x^2y^2+2xy^3$
- Θέτοντας $x = y = 1$ έχουμε: $1+1+2+2+2 = 8$ τρόποι δηλ. διαφορετικοί χρωματισμοί.

Εναλλακτική λύση:
Η βάση της πυραμίδας μπορεί να χρωματιστεί με 2 τρόπους (αφού 2 είναι τα διαθέσιμα χρώματα). Για κάθε έναν από αυτούς τους χρωματισμούς, οι διαφορετικοί χρωματισμοί που μπορούν να λάβουν οι υπόλοιπες πλευρές προκύπτουν ως εξής:

- $D = \{a, b, c\}$, οι πλευρές (εκτός της βάσης)
- $R = \{x, y\}$, τα χρώματα με $w(x) = x, w(y) = y$
- Έχουμε τις εξής μεταθέσεις: $\pi_1 = \begin{pmatrix} abc \\ abc \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} abc \\ bca \end{pmatrix}$ και $\pi_3 = \begin{pmatrix} abc \\ cab \end{pmatrix}$, δηλ. $|G| = 3$.
- Για την π_1 είναι: x_1^3
- Για την π_2 είναι: x_3^1
- Για την π_3 είναι: x_3^1
- Οπότε: $P_G = \dfrac{x_1^3 + x_3^1 + x_3^1}{3} = \dfrac{x_1^3 + 2x_3^1}{3}$



- Έχουμε 2 χρώματα με βάρη x, y, οπότε:
- Οπότε: $P_G = \dfrac{(x+y)^3 + 2(x^3+y^3)}{3}$
- Θέτοντας $x = y = 1$ έχουμε: $\frac{2^3+2\cdot 2}{3} = \frac{12}{3} = 4$ τρόποι δηλ. διαφορετικοί χρωματισμοί για κάθε διαφορετικό χρωματισμό της βάσης. Επομένως, συνολικά υπάρχουν $2 \cdot 4 = 8$ διαφορετικοί χρωματισμοί.

3.2 Χρησιμοποιώντας την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού, υπολογίστε πόσες τοποθετήσεις των ψηφίων 0,1,2,...,9 υπάρχουν στις οποίες το πρώτο ψηφίο να είναι μεγαλύτερο από το 1 και το τελευταίο ψηφίο να είναι μικρότερο από το 8.

- Έστω S το σύνολο όλων των πιθανών μεταθέσεων των στοιχείων 0,1,2,...,9. $|S| = N = 10!$

- c_1: το πρώτο ψηφίο μιας μετάθεσης είναι μικρότερο ή ίσο με 1, $N(c_1) = 2 \cdot 9!$
- c_2: το τελευταίο ψηφίο μιας μετάθεσης είναι μεγαλύτερο ή ίσο με 8, $N(c_2) = 2 \cdot 9!$
- Αυτό που ζητάμε είναι το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2})$.
- $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}) = N - N(c_1) - N(c_2) + N(c_1 c_2) = 10! - 2 \cdot 9! - 2 \cdot 9! + 4 \cdot 8! = 2.338.560$