

Εξέταση στο μάθημα «Διακριτά Μαθηματικά Ι»

Οκτώβριος 1997

ΘΕΜΑΤΑ

1. Ένας τρόπος επικοινωνίας των πλοίων μεταξύ τους είναι η ανάρτηση σημαίων σε έναν ιστό τους, έτσι ώστε κάθε διάταξη από σημαίες να αντιστοιχεί σε συγκεκριμένο μήνυμα. Εστω ότι ένα πλοίο μεταφέρει 12 κόκκινες, 12 λευκές, 12 μπλε και 12 μαύρες σημαίες, και ότι κάθε μήνυμα σχηματίζεται από συνολικά 12 σημαίες. Δείξτε ότι το πλήθος των μηνυμάτων που περιέχουν άρτιο αριθμό από μπλε σημαίες και περιττό αριθμό από μαύρες σημαίες είναι ίσο με  $4^{11}$ .
2. Εστω  $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n}$  μια πιθανή μετάθεση (διάταξη)  $n$  διακεκριμένων αντικειμένων. Θεωρούμε ότι κάθε αντικείμενο έχει μία «απαγορευμένη θέση», δηλαδή μια θέση στην οποία το αντικείμενο απαγορεύεται να βρίσκεται, και ότι δύο αντικείμενα δεν μπορεί να έχουν την ίδια απαγορευμένη θέση. Μια διαταραχή (derangement) είναι μια μετάθεση όπου κάθε αντικείμενο δεν βρίσκεται στην απαγορευμένη θέση του. Αποδείξτε ότι το πλήθος  $d_n$  των πιθανών διαταραχών  $n$  διακεκριμένων αντικειμένων είναι:

$$d_n = \frac{n!}{e}.$$

3. Σε ένα κυκλικό τραπέζι με 5 θέσεις πρόκειται να καθίσουν εκπρόσωποι τριών φοιτητικών παρατάξεων Α, Β, και Γ. Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν οι εκπρόσωποι έτσι ώστε να εκπροσωπείται κάθε παράταξη.

Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

Καλή επιτυχία!

Λευτέρης Κυρούσης, Ηλίας Σταυρόπουλος.