Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Ηλεκτρονικων Υπολογιστων & Πληροφορικης

Εξέταση στο μάθημα «Διακριτά Μαθηματικά Ι»

Ιούνιος 1998

ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνεται η ακολουθία
$$\delta_{nr} = \begin{cases} 0 \text{ , αν } n \neq r, \\ 1 \text{ , αν } n = r. \end{cases}$$
   (a) Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\delta_{nr}, r = 0, 1, \ldots$ (n σταθερό).
   (b) Κάντε το ίδιο για την ακολουθία
$$\gamma_{nr} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{r+k} \binom{n}{k} \binom{k}{r}.$$
   Τί συμπεραίνετε;

2. Έστω ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις α, β και γ. Σκοπεύουμε να χρωματίσουμε τις 8 κορυφές του έχοντας στη διάθεση μας n διαφορετικά χρώματα. Να υπολογιστεί το πλήθος των μη ισοδύναμων χρωματισμών των κορυφών του παραλλεπιπέδου στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:
   (a) $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$,
   (b) $\alpha = \beta \neq \gamma$.

3. Έστω $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n}$ μια πιθανή μετάθεση (διάταξη) n διακεκριμένων αντικειμένων. Θεωρούμε ότι κάθε αντικείμενο έχει μία «απαγορευμένη θέση», δηλαδή μια θέση στην οποία το αντικείμενο απαγορεύεται να βρίσκεται, και ότι δύο αντικείμενα δεν μπορεί να έχουν την ίδια απαγορευμένη θέση. Μια *διαταραχή* (derangement) είναι μια μετάθεση όπου κάθε αντικείμενο δεν βρίσκεται στην απαγορευμένη θέση του. Αποδείξτε ότι το πλήθος d_n των πιθανών διαταραχών n διακεκριμένων αντικειμένων είναι:
$$d_n = \frac{n!}{e}.$$

4. Αν εκφράσουμε την αντικειμενική συνάρτηση C ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού με την εξίσωση
$$C + u_{i_1} x_{i_1} + \cdots + u_{i_r} x_{i_r} = w_0,$$
   όπου w_0 σταθερά και $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ οι μη βασικές μεταβλητές, τότε η C μεγιστοποιείται όταν όλοι οι συντελεστές $u_{i_1}, \ldots, u_{i_r}$ είναι θετικοί. Εξηγήστε γιατί συμβαίνει αυτό.

Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.
Καλή επιτυχία!
Λευτέρης Κυρούσης, Ηλίας Σταυρόπουλος.