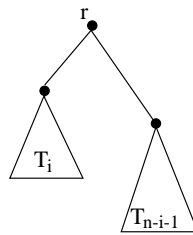


Εξέταση στο μάθημα «Διακριτά Μαθηματικά Ι»

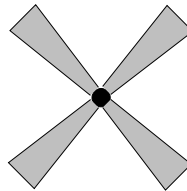
Ιούνιος 1999

ΘΕΜΑΤΑ

1. Να υπολογιστεί το πλήθος των τρόπων που μπορούμε να κατανείμουμε 25 όμοιες μπάλλες σε 7 διαφορετικές υποδοχές, εάν η πρώτη υποδοχή δεν μπορεί να περιέχει περισσότερες από 10 μπάλλες.
2. Ένα δυαδικό δέντρο με n κορυφές είτε είναι κενό ($n = 0$), είτε είναι μια τριάδα (T_i, r, T_{n-i-1}) , όπου r είναι μια διακεκριμένη κορυφή (η ρίζα), T_i είναι ένα δυαδικό δέντρο i κορυφών (το αριστερό υποδέντρο) και T_{n-i-1} είναι ένα δυαδικό δέντρο $n - i - 1$ κορυφών (το δεξιό υποδέντρο). Να υπολογιστεί το πλήθος όλων των δυαδικών δέντρων που υπάρχουν.



3. Να υπολογιστεί το πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών της έλικας του παρακάτω σχήματος, αν έχουμε στην διάθεση μας k διαφορετικά χρώματα, $k \geq 1$, (i) με την μέθοδο Burnside και (ii) με την μέθοδο Pólya. Σε πόσους χρωματισμούς το k -οστό χρώμα εμφανίζεται τουλάχιστον δύο φορές; Σημείωση: η έλικα στηρίζεται σε κάθετο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της.



4. Έστω $a_1 a_2 \dots a_n$ μια πιθανή διάταξη n διακεκριμένων αντικειμένων a_1, a_2, \dots, a_n . Θεωρούμε ότι κάθε αντικείμενο έχει μία «απαγορευμένη θέση», δηλαδή μια θέση στην οποία το αντικείμενο απαγορεύεται να βρίσκεται, και ότι δύο αντικείμενα δεν μπορεί να έχουν την ίδια απαγορευμένη θέση. Αν $r \leq n$, να υπολογιστεί με τη μέθοδο Εγκλεισμού–Αποκλεισμού το πλήθος των δυνατών διατάξεων των n αντικειμένων στις οποίες κανένα από τα r πρώτα αντικείμενα a_1, a_2, \dots, a_r δεν βρίσκεται στην απαγορευμένη θέση του.

Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

Καλή επιτυχία!

Λευτέρης Κυρούσης, Χρήστος Μπούρας, Ηλίας Σταυρόπουλος.