Πανεπιστήμιο Πατρών – Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών & Πληροφορικής

Εξέταση στο μάθημα «Διακριτά Μαθηματικά Ι»

Φεβρουάριος 2000

ΘΕΜΑΤΑ

1. Να αποδείξετε με συνδυαστικά επιχειρήματα (σύντομα, με ακρίβεια και σαφήνεια) ότι ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης r διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές έτσι ώστε σε κάθε υποδοχή i, $i = 1, \ldots, n$, να υπάρχουν ακριβώς r_i αντικείμενα (χωρίς να μετρά η σειρά εμφάνισης των αντικειμένων σε κάθε υποδοχή) είναι
$$\frac{r!}{r_1! \cdots r_n!}$$

2. Έστω ότι δίνονται δύο διακεκριμένα είδη αντικειμένων, σε απεριόριστο αριθμό, και έστω ότι τα αντικείμενα του ιδίου είδους δεν είναι διακεκριμένα. Να υπολογιστεί ο αριθμός των τρόπων που μπορούν να τοποθετηθούν r από τα παραπάνω αντικείμενα σε n διακεκριμένες υποδοχές (τα r αντικείμενα μπορούν να επιλέγονται από το κάθε ένα από τα δύο είδη με οποιοδήποτε τρόπο).

   Υπόδειξη: Θεωρήστε, εξηγώντας γιατί, τη γεννήτρια συνάρτηση δύο μεταβλητών
$$\left(1 + x + x^2 + \cdots\right)^n \left(1 + y + y^2 + \cdots\right)^n.$$

3. Να υπολογιστεί το πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών ενός κανονικού πενταγώνου το οποίο μπορεί να κινείται ελεύθερα στο χώρο, όταν έχουμε στη διάθεση μας k διαφορετικά χρώματα ($k \geq 1$),

   (a) με την μέθοδο Burnside, και

   (b) με την μέθοδο Polya.

   Σε πόσους χρωματισμούς το k-οστό χρώμα εμφανίζεται τουλάχιστον 2 φορές;

4. Ο πύργος του Ανόι είναι ένα σύνολο από n κυκλικούς δίσκους που βρίσκονται ο ένας επάνω στον άλλο και είναι περασμένοι σε ένα στύλο έτσι ώστε ένας δίσκος να μη βρίσκεται ποτέ επάνω σε δίσκο με μικρότερη επιφάνεια. Θέλουμε να μεταφέρουμε τον πύργο από ένα στύλο A σε ένα στύλο B χρησιμοποιώντας ένα βοηθητικό στύλο Γ, μετακινώντας μόνο ένα δίσκο κάθε φορά και διατηρώντας τον περιορισμό ότι ουδέποτε θα τοποθετηθεί δίσκος πάνω από άλλον με μικρότερη επιφάνεια. Να βρεθεί το ελάχιστο πλήθος των μετακινήσεων που απαιτούνται για να γίνει αυτό.

Απαντήστε σε 3 από τα 4 θέματα. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.
Καλή επιτυχία!
Λευτέρης Κυρούσης, Ηλίας Σταυρόπουλος.