Πανεπιστήμιο Πατρών – Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών & Πληροφορικής

Εξέταση στο μάθημα «Διακριτά Μαθηματικά Ι»

Σεπτέμβριος 2000

ΘΕΜΑΤΑ

1. Αποδείξτε ότι το πλήθος των λέξεων με n γράμματα που μπορούν να σχηματιστούν από τα γράμματα Α, Ι, Ζ και Ρ, έτσι ώστε ο αριθμός των εμφανίσεων του Α να είναι ίσος με το άθροισμα του αριθμού εμφανίσεων του Ζ και του Ρ, είναι:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{n!}{k!(n-2k)!} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(k-i)!i!} \right).$$

2. Αν έχουμε στη διαθεσή μας 6 διαφορετικά χρώματα, με πόσους τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τις κορυφές ενός κανονικού οκταγώνου που κινείται ελεύθερα στο επίπεδο, χρησιμοποιώντας ένα ή περισσότερα χρώματα;

3. Έστω η λογική έκφραση $\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge C_3$ όπου $C_1 = (x_1 \vee x_2)$, $C_2 = (x_3 \vee x_4)$, $C_3 = (x_5 \vee x_6)$ και $x_i \in \{0,1\}, i = 1, \ldots, 6$. Λέμε ότι το δυαδικό διάνυσμα $t \in \{0,1\}^6$ *ικανοποιεί* τον περιορισμό C_j, $j = 1, 2, 3$, αν αποδίδει τιμή 1 σε μία τουλάχιστον από τις μεταβλητές που εμφανίζονται στον C_j. Λέμε επίσης ότι το t *ικανοποιεί* την ϕ αν ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς της. (Για παράδειγμα, το δυαδικό διάνυσμα $t = 111010$ ικανοποιεί την ϕ.) Χρησιμοποιώντας την μέθοδο Εγκλεισμού/Αποκλεισμού, να υπολογίσετε το πλήθος των δυαδικών διανυσμάτων που ικανοποιούν την ϕ.

Απαντήστε σε όλα τα θέματα. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.
Καλή επιτυχία!
Λευτέρης Κυρούσης, Ηλίας Σταυρόπουλος.