Πανεπιστήμιο Πατρών – Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών & Πληροφορικής

Εξέταση στο μάθημα «Διακριτά Μαθηματικά Ι»

Ιανουάριος 2001

ΘΕΜΑΤΑ

1. Να αποδειχθεί ο τύπος συνέλιξης του Vandermorde

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n},$$

   χρησιμοποιώντας (i) συνδυαστικά επιχειρήματα (1,75 μονάδες) και (ii) ιδιότητες γεννητριών συναρτήσεων. (1,75 μονάδες)

2. Με πόσους διαφορετικούς (μη ισοδύναμους) τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τις κορυφές ενός κανονικού πενταγώνου το οποίο κινείται ελεύθερα στο χώρο αν έχουμε στη διαθεσή μας 3 χρώματα; (1 μονάδα) Σε πόσους από τους παραπάνω χρωματισμούς: (i) Το πρώτο χρώμα δεν χρησιμοποιείται; (0.5 μονάδες) (ii) Το πρώτο χρώμα χρησιμοποιείται τουλάχιστον δύο φορές; (0.5 μονάδες) (iii) Το πρώτο χρώμα χρησιμοποιείται τουλάχιστον δύο φορές και το δεύτερο τουλάχιστον μία; (0.5 μονάδες)

3. Με χρήση γεννητριών συναρτήσεων να υπολογισθεί το πλήθος των διατάξεων μήκους r πέντε διαφορετικών αντικειμένων ώστε το πρώτο αντικείμενο να εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά, το δεύτερο να έχει άρτιο πλήθος εμφανίσεων ενώ το τρίτο και το τέταρτο, περιττό πλήθος εμφανίσεων. (2,5 μονάδες)

4. Έστω V και S δύο πεπερασμένα σύνολα (σύνολο κορυφών και σύνολο χρωμάτων, αντίστοιχα). Έστω ότι $\mathcal{X}$ είναι το σύνολο των απεικονίσεων από το V στο S και G μία ομάδα συμμετριών του V. Αν $f, g \in \mathcal{X}$ και $\pi \in G$, ορίζουμε $\pi(f) \in \mathcal{X}$ ως εξής: $\forall u \in V, \pi(f)(u) = f(\pi(u))$. Επίσης ορίζουμε $J(g) = \{\pi \in G : \pi(g) = g\}$ και $E(f,g) = \{\pi \in G : \pi(f) = g\}$. Να αποδειχθεί ότι αν υπάρχει $\pi_0 \in G$ έτσι ώστε $\pi_0(f) = g$, τότε τα σύνολα $J(g)$ και $E(f,g)$ έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. (1,5 μονάδες)

Καλή επιτυχία!
Λευτέρης Κυρούσης,
Αλέξης Καπόρης.