Πανεπιστήμιο Πατρών - Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών & Πληροφορικής

**Εξέταση στο μάθημα "Διακριτά Μαθηματικά Ι"**

Φεβρουάριος 2004

ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. (i) Για να ικανοποιήσουμε τον περιορισμό κάθε υποσύνολο να περιέχει τουλάχιστον δυο αντικείμενα, παίρνουμε 6 αντικείμενα και τοποθετούμε από δυο σε κάθε υποσύνολο. Αφού τα αντικείμενα είναι μη διακεκριμένα δεν μας ενδιαφέρει ποια ακριβώς αντικείμενα θα τοποθετήσουμε σε κάθε υποσύνολο, αρκεί να είναι δυο. Ο συνολικός αριθμός των τρόπων να μοιράσουμε τα υπόλοιπα $(r-6)$ αντικείμενα προκύπτει ως εξής: Σε κάθε αντικείμενο από τα $(r-6)$ αναθέτουμε ένα υποσύνολο από τα τρία. Τον αριθμό των τρόπων να κάνουμε κάτι τέτοιο μας τον δίνουν οι συνδυασμοί των $(r-6)$ αντικειμένων από 3 με επανάληψη, είναι δηλαδή $\binom{r-6+3-1}{r-6} = \binom{r-4}{r-6} = \frac{(r-4)(r-5)}{2}$.

   (ii) Η γεννήτρια συνάρτηση που έχει σαν συντελεστές τον αριθμό των τρόπων που μπορούμε να διανείμουμε τα $r$ αντικείμενα στα 3 υποσύνολα, με τον περιορισμό κάθε υποσύνολο να περιέχει τουλάχιστον 2 αντικείμενα, είναι:

$$\begin{aligned}
A(x) &= \left(x^2+x^3+x^4+\dots\right)\left(x^2+x^3+x^4+\dots\right)\left(x^2+x^3+x^4+\dots\right) = \\
&= x^6\left(1+x+x^2+\dots\right)\left(1+x+x^2+\dots\right)\left(1+x+x^2+\dots\right) = \\
&= x^6\left(\frac{1}{1-x}\right)^3 = x^6(1-x)^{-3} = x^6\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-3}{k}x^k = x^6\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k-1}{k}x^k
\end{aligned}$$

   Για να βρούμε τον συντελεστή του $x^r$ (ο οποίος είναι και η απάντηση στο πρόβλημά μας) θέτουμε όπου $k=r-6$, και παίρνουμε $\binom{r-6+3-1}{r-6} = \binom{r-4}{r-6} = \frac{(r-4)(r-5)}{2}$.

2. (Βλέπε Άσκηση 2.6 από βιβλίο "Διακριτά Μαθηματικά: Προβλήματα και Λύσεις").

3. Θα βρώ τους τετραγωνικούς αριθμούς μέχρι το 100 και θα αφαιρέσω το πλήθος τους από το 98 (τόσοι αριθμοί υπάρχουν από το 2 έως το 99) για να βρώ το πλήθος των μη τετρα-

γωνικών. Τους τετραγωνικούς τους βρίσκω ως εξής:

(1) Παίρνω όλα τα τετράγωνα αριθμών που είναι μικρότερα από 100. Αυτά είναι: (4, 6, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81).

(2) Βρίσκω τα πολλαπλάσια (μόνο το πλήθος τους) που είναι μικρότερα από το 100.

(3) Όμως τα πολλαπλάσια του 16 και του 64 τα έχω μετρήσει στα πολλαπλάσια του 4, του 81 στα πολλαπλάσια του 9 και του 36 τα έχω μετρήσει 2 φορές (σαν πολ/σια του 4 και σαν πολ/σια του 9), οπότε πρέπει να τα αφαιρέσω μια φορά.

(4) Κάνω την πρόσθεση και αφαιρώ το αποτέλεσμα από το 98. Αυτός είναι και ο αριθμός που ψάχνω.

Όσα περιγράφονται πιο πάνω συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

| Τετράγωνο | #πολλαπλάσιων $< 100$ | Καταμέτρηση |
|---|---|---|
| 4 | 24 | ναι |
| 9 | 11 | ναι |
| 16 | 6 | όχι (τα μέτρησα ήδη) |
| 25 | 3 | ναι |
| 36 | 2 | αφαιρώ μια φορά (τα μέτρησα δυο φορές) |
| 49 | 2 | ναι |
| 64 | 1 | όχι (τα μέτρησα ήδη) |
| 81 | 1 | όχι (τα μέτρησα ήδη) |

Άρα οι τετραγωνικοί αριθμοί από 2 έως 99 είναι $24 + 11 + 3 - 2 + 2 = 38$. Συνολικά οι αριθμοί από 2 έως 99 είναι 98, άρα υπάρχουν $98 - 38 = 60$ μη τετραγωνικοί αριθμοί.

4. Κάνοντας την απαραίτητη αντιστοίχιση, πρόκειται για έναν απλό κύβο όπου πρέπει να χρωματίσω τις κορυφές του με 4 διαφορετικά χρωματα (έστω με μεταβλητές $x, y, z, w$). Παράγω το πολυώνυμο Polya χρησιμοποιώντας τις γνωστές συμμετρίες του κύβου (πλήρης ανάλυση των συμμετριών). Τα ερωτήματα τότε απαντώνται ως εξής (κάνοντας όλες τις αριθμητικές πράξεις):

   i. # διαφορετικών χρωματισμών $\rightarrow$ θέτω $x = 1, y = 1, z = 1, w = 1$

   ii. Ψάχνω τον συντελεστή του όρου $x^2y^2z^2w^2$. Παραγωγίζω κατάλληλα και θέτω στην παράγωγο $x = 0, y = 0, z = 0, w = 0$

   iii. Ψάχνω τον συντελεστή του όρου $x^3$. Παραγωγίζω κατάλληλα τρεις φορές, διαιρώ με 3! και θέτω στην παράγωγο $x = 0, y = 1, z = 1, w = 1$

iv. Ψάχνω τον συντελεστή των όρων $x^3, x^4, \ldots, x^8$. Παραγωγίζω τρεις φορές, τέσσερις, πέντε, ... ,θέτω στην παράγωγο $x = 1, y = 1, z = 1, w = 1$, και προσθέτω τα αποτελέσματα.