Πανεπιστήμιο Πατρών - Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών & Πληροφορικής

Εξέταση στο μάθημα "Διακριτά Μαθηματικά Ι"

Σεπτέμβριος 2004

ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. (a) Προφανώς ισχύει $f(n) = 0$ για n περιττό, αφού συνολικά τα υποσύνολα θα πρέπει να περιέχουν άρτιο αριθμό αντικειμένων (2 αντικείμενα σε κάθε υποσύνολο). Επομένως κάποιο αντικείμενο θα περισσεύει, και άρα δεν υπάρχει διαμέριση που να περιλαμβάνει όλα τα αντικείμενα.

   Στην περίπτωση που το n είναι άρτιο, υποθέτουμε ότι είναι της μορφής $n = 2m$. Θα σχηματίσουμε m υποσύνολα των 2 στοιχείων. Οι δυνατές μεταθέσεις των $2m$ αντικειμένων είναι $(2m)!$, όμως δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των αντικειμένων σε κάθε υποσύνολο ούτε η σειρά με την οποία θα σχηματίσουμε τα υποσύνολα. Για να βρούμε τον αριθμό των δυνατών διαμερίσεων, στην πρώτη περίπτωση θα πρέπει να διαιρέσουμε τις μεταθέσεις των $2m$ αντικειμένων με 2^m και στην δεύτερη με $m!$, και επομένως έχουμε:

$$f\left(2m\right) = \frac{(2m)!}{2^m m!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2m)}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2m)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2m)} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m-1) \Rightarrow$$

$$f\left(n\right) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n-1)\,, n \text{ άρτιος}$$

   (b) Ψάχνουμε να βρούμε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση

$$\sum_{n=0}^{\infty} f\left(n\right) \frac{x^n}{n!}$$

   και να αποδείξουμε ότι είναι ίση με $e^{\frac{x^2}{2}}$.

   Στο ερώτημα (a) αποδείξαμε ότι $f(n) = 0$ για n περιττό, επομένως οι αντίστοιχοι όροι του αθροίσματος είναι 0. Μένουν μόνο οι όροι όπου το n είναι άρτιος της μορφής $n = 2m$. Έτσι η παραπάνω γεννήτρια γίνεται:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f\left(n\right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)!}{2^m m!} \frac{x^{2m}}{(2m)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^m = e^{\frac{x^2}{2}}$$

2. (a) Θα αποδείξουμε την σχέση με συνδυαστικά επιχειρήματα. Έστω ότι έχω $2n$ αντικείμενα και θέλω να επιλέξω n από αυτά, χωρίς να με ενδιαφέρει η σειρά επιλογής. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{2n}{n}$ διαφορετικούς τρόπους. Εναλλακτικά μπορώ να τα χωρίσω σε δυο ομάδες των n στοιχείων και η επιλογή να γίνει ως εξής: να διαλέξω n αντικείμενα από την πρώτη ομάδα και κανένα από την δεύτερη, δηλαδή με $\binom{n}{n}\binom{n}{0} = \binom{n}{0}^2$ ή να διαλέξω $n-1$ αντικείμενα από την πρώτη ομάδα και 1 από την δεύτερη, δηλαδή με $\binom{n}{n-1}\binom{n}{1} = \binom{n}{1}^2$ τρόπους κ.ο.κ δηλαδή συνολικά με $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2$ τρόπους. Προφανώς οι δυο αυτοί τρόποι επιλογής είναι ισοδύναμοι, και άρα η ζητούμενη σχέση έχει αποδειχθεί.

(b) Θεωρώ την ακολουθία $a_k = \sum\limits_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{n}{l}^2$, η οποία λόγω της ισότητας $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ γράφεται και $a_k = \sum\limits_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{n}{l}\binom{n}{n-l}$. Η ακολουθία a_k είναι συνέλιξη των ακολουθιών $b_k = (-1)^k \binom{n}{k}$ και $c_k = \binom{n}{k}$, επομένως από την ιδιότητα της συνέλιξης ξέρω ότι η γεννήτρια συνάρτηση της $A(x)$ είναι το γινόμενο των γεννητριών συναρτήσεων $B(x)$, $C(x)$ των b_k και c_k αντίστοιχα. Έτσι:

$$\begin{aligned} A\left(x\right) &= B\left(x\right) C\left(x\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} x^k\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k\right) = \\ &= \left(1-x\right)^n \left(1+x\right)^n = \left(1-x^2\right)^n \Rightarrow \\ A\left(x\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} x^{2k} \qquad (1) \end{aligned}$$

Ισχύει προφανώς και

$$A\left(x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{n}{l} \binom{n}{n-l} \right) x^k \qquad (2)$$

Από την σχέση (2) μπορώ να πάρω το αριστερό μέλος της ζητούμενης σχέσης αν πάρω τον συντελεστή του x^n. Όμοια από την (1) παίρνω το δεξιό μέλος παίρνοντας τον συντελεστή του x^n, με τους κλάδους να προκύπτουν για τις περιπτώσεις n περιττός και n άρτιος.

Παρόμοια μπορεί να απαντηθεί και το ερώτημα (a) χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις.

3. Κάνοντας την απαραίτητη αντιστοίχιση, πρόκειται για έναν απλό κύβο όπου πρέπει να χρωματίσω τις κορυφές του με 4 διαφορετικά χρωματα (έστω με μεταβλητές x, y, z, w). Παράγω το πολυώνυμο Polya χρησιμοποιώντας τις γνωστές συμμετρίες του κύβου (πλήρης ανάλυση των συμμετριών). Τα ερωτήματα τότε απαντώνται ως εξής:

   i. # διαφορετικών χρωματισμών $\rightarrow$ θέτω $x = 1, y = 1, z = 1, w = 1$

   ii. Ψάχνω τον συντελεστή του όρου $x^2y^2z^2w^2$. Παραγωγίζω κατάλληλα και θέτω στην παράγωγο $x = 0, y = 0, z = 0, w = 0$

   iii. Ψάχνω τον συντελεστή του όρου x^3. Παραγωγίζω κατάλληλα τρεις φορές, διαιρώ με 3! και θέτω στην παράγωγο $x = 0, y = 1, z = 1, w = 1$