

Εξέταση στο μάθημα “Διακριτά Μαθηματικά Ι”

Φεβρουάριος 2005

ΘΕΜΑΤΑ

1. (2 μονάδες) Πόσες ζαριές από  $r$  ζάρια υπάρχουν (η σειρά που εμφανίζονται τα ζάρια σε μια ζαριά δε «μετρά» - ένα ζάρι έχει έξι όψεις 1-6); Δικαιολογήστε πλήρως και συνοπτικά την απάντησή σας.

2. (3 μονάδες)

(a) Αποδείξτε με συνδυαστικά επιχειρήματα την αναδρομική σχέση:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

(b) Να επιλύσετε την παραπάνω αναδρομική σχέση με την μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων και γνωρίζοντας μόνο ότι  $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k$  (δηλ. υποτίθεται ότι δεν γνωρίζετε ότι  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ). Δίνεται:  $\binom{n}{0} = 1, \forall n \geq 0$ .

Υπόδειξη: Έστω  $A_n(x)$  η γεννήτρια συνάρτηση της  $\binom{n}{k}$ ,  $k = 0, 1, \dots$  (ακολουθία ως προς  $k$ ). Αποδείξτε ότι  $A_n(x) = (1+x)^n$ .

3. (2 μονάδες)

(a) Να βρείτε τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας  $a_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , όπου  $a_k$  είναι ο αριθμός των τρόπων να γραφεί ο φυσικός αριθμός  $k$  στη μορφή

$$2x + 3y$$

όπου  $x, y$  φυσικοί αριθμοί.

(b) Εάν  $a, b, c$  γνωστοί φυσικοί αριθμοί, να βρείτε μια έκφραση που δίνει τον αριθμό των λύσεων που αποτελούνται από φυσικούς αριθμούς της εξίσωσης δυο αγνώστων:

$$a = bx + cy$$

Υπόδειξη: Η ζητούμενη έκφραση δίνεται με βάση την  $a$ -οστή παράγωγο μιας συνάρτησης με παραμέτρους τα  $b$  και  $c$ .

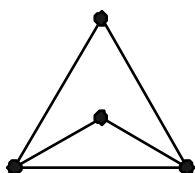
4. (3 μονάδες)

- (a) Εάν  $f, g$  είναι δυο ισοδύναμοι «χρωματισμοί» μιας δομής με σύνολο κορυφών  $V$  και ομάδα συμμετριών  $G$ , να αποδείξετε, ορίζοντας μια αμφιμονοσήμαντη και επί αντιστοιχία, ότι τα παρακάτω δυο σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων:

$$E(f, g) = \{\pi \in G \mid \pi(f) = g\}$$
$$J(f) = \{\pi \in G \mid \pi(f) = f\}$$

Δεν χρειάζεται να αποδείξετε ότι η αντιστοιχία είναι πράγματι αμφιμονοσήμαντη και επί.

- (b) Βρείτε με πόσους τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τις κορυφές του παρακάτω συμμετρικού σχήματος στις εξής περιπτώσεις:
- Αν έχουμε 4 χρώματα.
  - Αν έχουμε 4 χρώματα και χρησιμοποιήσουμε το πρώτο χρώμα ακριβώς δυο φορές.
  - Αν έχουμε 4 χρώματα και χρησιμοποιήσουμε το πρώτο χρώμα τουλάχιστον δυο φορές.



Σημείωση: Οι πλευρές του εξωτερικού τριγώνου είναι ίσες και η κεντρική κορυφή βρίσκεται στο κέντρο βάρους του.

Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Καλή επιτυχία!

Λευτέρης Κυρούσης, Γιώργος Γεωργιάδης