Πανεπιστήμιο Πατρών - Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών & Πληροφορικής

Εξέταση στο μάθημα "Διακριτά Μαθηματικά Ι"

Σεπτέμβριος 2005

ΘΕΜΑΤΑ

1. (2 μονάδες) Να αποδειχθεί ο τύπος της συνέλιξης του Vandermonde

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

   χρησιμοποιώντας (i) συνδυαστικά επιχειρήματα και (ii) ιδιότητες γεννητριών συναρτήσεων.

2. (3 μονάδες) Έστω a_n το πλήθος των συμβολοσειρών που μπορούν να σχηματιστούν από n διαφορετικά γράμματα, χρησιμοποιώντας κάθε γράμμα το πολύ μια φορά και συμπεριλαμβάνοντας την κενή συμβολοσειρά.

   (i) Αποδείξτε ότι ισχύει:

   $$a_0 = 1,\ a_n = na_{n-1} + 1,\ \text{για } n \geq 1$$

   (ii) Να βρεθεί η *εκθετική* γεννήτρια συναρτησή της ακολουθίας a_n.

3. (3 μονάδες) Με την βοήθεια ιδιοτήτων των γεννητριών συναρτήσεων, να αποδείξετε ότι:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$$

   Υπόδειξη: Ξεκινήστε από το διωνυμική ισότητα $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ και χρησιμοποιήστε την παρατήρηση ότι ισότητα ακολουθιών σημαίνει και ισότητα των αντίστοιχων γεννητριών συναρτήσεων.

4. (2 μονάδες) Έστω $c(n)$ το πλήθος των συνδεδεμένων αντιμεταθέσεων του συνόλου $\{1, \ldots, n\}$ (μια αντιμετάθεση λέγεται συνδεδεμένη αν δεν υπάρχει φυσικός k με $1 \leq k \leq n-1$ τέτοιος ώστε η αντιμετάθεση να απεικονίζει το σύνολο $\{1, \ldots, k\}$ στον εαυτό του). Αποδείξτε ότι ισχύει:

$$n! = \sum_{k=1}^{n} c(k)(n-k)!$$

Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.
Καλή επιτυχία!
Λευτέρης Κυρούσης, Γιώργος Γεωργιάδης