

Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών & Πληροφορικής  
Εξέταση στο μάθημα ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι  
Ημερομηνία: 24-1-2006

**Θέμα 1** (4,5 μονάδες)

- α) Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας  $\beta_r = \frac{1}{r}$  για  $r > 0$  και  $\beta_0 = 0$ .  
(Υπενθύμιση:  $\int \frac{1}{x} dx = \ln x$ )
- β) Αν  $A(x) = \sum_{r \geq 0} a_r x^r$  και  $B(x) = \sum_{r \geq 0} b_r x^r$  ώστε  $b_k = \sum_{r=0}^k a_r$  τότε με τη βοήθεια της ιδιότητας συνέλιξης γεννητριών συναρτήσεων να υπολογίσετε τη γεννήτρια  $B(x)$  ως συνάρτηση της  $A(x)$ .
- γ) Έστω η ακολουθία  $\alpha_r = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{r}$  για  $r > 0$  και  $\alpha_0 = 0$ . Υπολογίστε την γεννήτρια συνάρτηση της παραπάνω ακολουθίας.

**Θέμα 2** (3,5 μονάδες)

- Τα τετράγωνα σκακιέρας με διαστάσεις  $2 \times 4$  βάφονται με άσπρο και κόκκινο χρώμα. Πόσοι μη ισοδύναμοι χρωματισμοί της σκακιέρας έχουν 3 κόκκινα τετράγωνα και 5 άσπρα τετράγωνα;  
(Θεωρούμε ότι η σκακιέρα μπορεί να κινείται ελεύθερα στο επίπεδο, δηλαδή μπορεί να περιστρέφεται στο επίπεδο που ορίζει.)

**Θέμα 3** (2 μονάδες)

Θεωρούμε διακριτές σφαίρες  $b_1, \dots, b_{n_\mu+n_\alpha+n_\kappa}$  όπου οι σφαίρες  $b_1, \dots, b_{n_\mu}$  είναι μαύρες, οι  $b_{n_\mu+1}, \dots, b_{n_\mu+n_\alpha}$  είναι άσπρες και οι  $b_{n_\mu+n_\alpha+1}, \dots, b_{n_\mu+n_\alpha+n_\kappa}$  είναι κόκκινες. Υποθέτουμε ότι  $n_\kappa < n_\alpha$  και  $n_\kappa < n_\beta$ . Επίσης θεωρούμε διακριτά κελιά  $M, A$  και  $K$  με χωρητικότητες  $n_\mu, n_\alpha$  και  $n_\kappa$  αντίστοιχα. Τοποθετούμε τις σφαίρες στα κελιά, χωρίς διάταξη σφαιρών εντός κελιών. Αποδείξτε **με αποκλειστικά συνδυαστικά επιχειρήματα** ότι το πλήθος των τοποθετήσεων ώστε το κελί  $M$  να **μη** λάβει μαύρη, το  $A$  να **μη** λάβει άσπρη και το  $K$  να **μη** λάβει κόκκινη σφαίρα είναι

$$\sum_{i=0}^{n_\kappa} \binom{n_\kappa}{i} \binom{n_\alpha}{n_\mu - i} \binom{n_\mu}{n_\alpha - (n_\kappa - i)}.$$

(Θεωρούμε χωρητικότητες  $n_\mu, n_\alpha, n_\kappa$  ώστε κάθε κελί να μπορεί να γεμίσει με σφαίρες επιτρεπόμενων χρωμάτων.)

Υπόδειξη: Θεωρήστε ότι αρχικά οι κόκκινες σφαίρες είναι τοποθετημένες στο κουτί  $K$ , οι άσπρες στο  $A$  και οι μαύρες στο  $M$ . Βγάλτε τις κόκκινες από το  $K$  και μοιράστε τις στο  $A$  και  $M$ . Στη συνέχεια βγάλτε και τις άσπρες και μαύρες από τα αρχικά τους κουτιά και παραγεμίστε το  $M$  με άσπρες κτλ.

Καλή σας επιτυχία  
Λευτέρης Κυρούσης  
Αλέξης Καπόρης και Χάρης Ευθυμίου