

Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών & Πληροφορικής

Εξέταση στο μάθημα ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Ημερομηνία: Ιούλιος 2007

**Θέμα 1** (3,5 μονάδες)

Έστω  $T$  ένα  $k$ -αδικό δέντρο  $l$  επιπέδων. Τοποθετούμε σε κάθε κόμβο του  $T$  μία δύναμη του  $x$ , αναδρομικά ως εξής: Στη 'ρίζα' υπάρχει το  $x^0 = 1$ . Στο  $i$ -οστό παιδί της κορυφής  $v$  υπάρχει το  $x^i$ , για  $i = 1, \dots, k$ . Επιλέγουμε ένα μονοπάτι από τη ρίζα σε κάποιο φύλλο του  $T$  και πολλαπλασιάζουμε όλες τις δυνάμεις του  $x$  που υπάρχουν στο μονοπάτι.

Βρείτε τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας όπου ο όρος  $a_r$  είναι ίσος με το πλήθος των μονοπατιών όπου στο κάθε ένα απο αυτά, ο πολλαπλασιασμός των δυνάμεων του  $x$  μας δίνει  $x^r$  (βλέπε παράδειγμα στο Σχήμα 1).

**Θέμα 2** (3,5 μονάδες)

(α) Να υπολογίσετε το συντελεστή του  $x^{40}$  στην παράσταση  $(1 + x^4 + x^5)^{100}$ . Παρατήρηστε ότι στην εξίσωση  $4 \cdot i + 5 \cdot j = 40$  οι ακέραιες λύσεις είναι οι  $(i, j) \in \{(0, 8), (5, 4), (10, 0)\}$

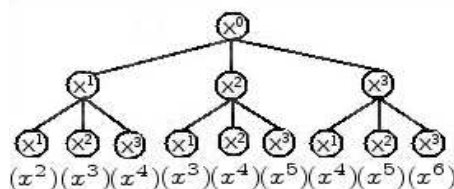
(β) Υπολογίστε τις παρακάτω παραστάσεις για  $n$  θετικό ακέραιο

$$\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} k \cdot (k-1) \quad \text{και} \quad \prod_{j=0}^n 5^{\binom{n}{j}}.$$

**Θέμα 3** (3,5 μονάδες)

Χρωματίζουμε τις κορυφές ενός κανονικού τετραέδρου με 2 χρώματα. Το τετραέδρο μπορεί να περιστρέφεται στο χώρο. Δύο χρωματισμοί των κορυφών του τετραέδρου θεωρούνται ισοδύναμοι εάν ο ένας μπορεί να προκύψει από τον άλλο, περιστρέφοντας το σώμα στο χώρο. Μετρήστε πόσοι είναι οι μη ισοδύναμοι χρωματισμοί των κορυφών. Οι μεταθέσεις που αντιστοιχούν στις συμμετρίες του σώματος δίνονται από τα παρακάτω είδη περιστροφών:

- η ταυτοτική μετάθεση
- περιστροφή  $120^\circ$  γύρω από τους άξονες που συνδέουν μία κορυφή με το κέντρο της απέναντι όψευς.
- περιστροφή  $180^\circ$  γύρω από τους άξονες που συνδέουν τα μέσα απέναντι ακμών.



Σχήμα 1: 3-αδικό δέντρο με 3 επίπεδα

Καλή σας επιτυχία  
Λευτέρης Κυρούσης  
Αλέξης Καπόρης και Χάρης Ευθυμίου