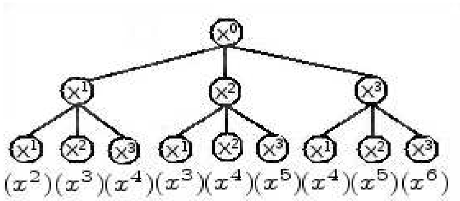
Λύσεις Θεμάτων Εξέταστικής Περιόδου: Ιούλιος 2007

Θέμα 1

Έστω T ένα k-αδικό δέντρο l επιπέδων. Τοποθετούμε σε κάθε κόμβο του T μία δύναμη του x, αναδρομικά ως εξής: Στη 'ρίζα' υπάρχει το $x^0 = 1$. Στο i-οστό παιδί της κορυφής v υπάρχει το x^i, για $i = 1, \ldots, k$. Επιλέγουμε ένα μονοπάτι από τη ρίζα σε κάποιο φύλλο του T και πολλαπλασιάζουμε ολες τις δυναμεις του x που υπάρχουν στο μονοπάτι. Βρείτε τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας όπου ο όρος a_r είναι ίσος με το πλήθος των μονοπατιών όπου στο κάθε ένα απο αυτά, ο πολλαπλασιασμός των δυνάμεων του x μας δίνει x^r (βλέπε παράδειγμα στο Σχήμα 1).



Σχήμα 1: 3-αδικό δέντρο με 3 επίπεδα

Λύση: Η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας όπου ο όρος a_r είναι ίσος με το πλήθος των μονοπατιών όπου στο κάθε ένα απο αυτά, ο πολλαπλασιασμός των δυνάμεων του x μας δίνει x^r ειναι η $g(x)$, όπου

$$g(x) = (x + x^2 + \cdots + x^k)^{l-1}$$

όπου k είναι το πλήθος των παιδιών κάθε κόμβου που δεν είναι φύλλο και l είναι το πλήθος των επιπέδων του δέντρου-το μήκος κάθε μονοπατιού.

Παρατηρήστε ότι κάθε βήμα ενός μονοπατιού μπορεί να περιλαμβάνει οποιαδήποτε δύναμη του x^i για $i = 1, \ldots, k$, επιλέγοντας το κατάλληλο παιδί του κόμβου οπου βρίσκεται στο τρέχον βήμα. Έτσι, το πλήθος των μονοπατιών όπου ο πολλαπλασιασμός των x^i κατα μήκος κάθε μονοπατιού με γινόμενο x^r είναι ίσο με του τρόπους όπου επιλέγοντας ενα $x, x^2, \ldots, x^k$ απο κάθε επίπεδο μπορούμε να 'φτιάξουμε' το x^r. Όμως, ακριβως αυτό είναι το πλήθος των τρόπων όπου μπορούμε να φτιάξουμε το x^r στο ανάπτυγμα της $g(x)$. Το παραπάνω επιχείρημα ισχύει για κάθε r. Άρα η ζητούμενη γεννήτρια συνάρτηση είναι η $g(x)$.

◇

Θέμα 2

(α) Να υπολογίσετε το συντελεστή του x^{40} στην παράσταση $(1+x^4+x^5)^{100}$. Παρατήρηστε ότι στην εξίσωση $4 \cdot i + 5 \cdot j = 40$ οι ακέραιες λύσεις είναι οι $(i, j) \in \{(0,8),(5,4),(10,0)\}$

(β) Υπολογίστε τις παρακάτω παραστάσεις για n θετικό ακέραιο

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k \cdot (k-1) \quad \text{και} \quad \prod_{j=0}^{n} 5^{\binom{n}{j}}.$$

Λύση: (α) Αναπτύσουμε την παράσταση $(1+x^4+x^5)^{100}$ χρησιμοποιώντας τον τύπο αναπτυγματος του Newton.

$$(1+x^4+x^5)^{100} = \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} x^{5\cdot j}(1+x^4)^{100-j}$$

Αναπτύσουμε με τον ίδιο τρόπο την παράσταση $(1+x^4)^{100-j}$, όπου έχουμε

$$(1+x^4+x^5)^{100} = \sum_{i=0}^{100} \binom{100}{j} x^{5\cdot j} \sum_{i=0}^{100-j} \binom{100-j}{i} x^{4i}$$

Για να υπολογίσουμε τον συντελεστή του x^{40} θα πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλα ζεύγη τιμών για τα i, j τέτοια ώστε $4 \cdot i + 5 \cdot j = 40$, με i, j θετικούς ακεραίους μικρότερους του 100. Από την παρατήρηση της εκφώνησης έχουμε ότι $(i, j) \in \{(0,8),(5,4),(10,0)\}$. Άρα ο συντελεστής του x^{40} είναι ο

$$\binom{100}{8}\binom{92}{0} + \binom{100}{4}\binom{96}{5} + \binom{100}{0}\binom{100}{10}$$

(β) Θα υπολογίσουμε το άθροισμα

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k \cdot (k-1) &= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} k \cdot (k-1) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{k(k-1)(k-2)!(n-k)!} k \cdot (k-1) \\
&= n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \\
&= n(n-1) \sum_{t=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{t!(n-t)!} \\
&= n(n-1)2^{n-2}
\end{aligned}$$

Τέλος, για το γινόμενο έχουμε

$$\prod_{k=0}^{n} 5^{\binom{n}{k}} = 5^{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}} = 5^{2^n}$$

◇

Θέμα 3

Χρωματίζουμε τις κορυφές ενός κανονικού τετραέδρου με 2 χρώματα. Το τετράεδρο μπορεί να περιστρέφεται στο χώρο. Δύο χρωματισμοί των κορυφών του τετραέδρουθεωρούνται ισοδύναμοι εάν ο ένας μπορεί να προκύψει από τον άλλο, περιστρέφοντας το σώμα στο χώρο. Μετρήστε πόσοι είναι οι *μη ισοδύναμοι* χρωματισμοί των κορυφών. Οι μεταθέσεις που αντιστοιχούν στις συμμετρείες του σώματος δίνονται από τα παρακάτω είδη περιστροφών:

- η ταυτοτική μετάθεση
- περιστροφή 120^o γύρω από τους άξονες που συνδέουν μία κορυφή με το κέντρο της απέναντι όψεως.
- περιστροφή 180^o γύρω από τους άξονες που συνδέουν τα μέσα απέναντι ακμών.

Λύση: Ο ζητούμενος αριθμός συμπίπτει με των αριθμό των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το σύνολο των τεσσάρων κορυφών του τετραέδρου και πεδίο τιμών το σύνολο των δύο χρωμάτων και ομάδα μεταθέσεων G το σύνολο όλων των δυνατών μεταθέσεων που αντιστοιχούν σε περστροφές του τετραέδρου. Αυτές είναι

- η ταυτοτική μετάθεση, με κυκλική αναπαράσταση x_1^4
- 8 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές 120^o γύρω από τους άξονες που συνδέουν μία κορυφή με το κέντρο της απέναντι όψεως, με κυκλική αναπαράσταση $x_1 x_3$.
- 3 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180^o γύρω από τους άξονες που συνδέουν τα μέσα απέναντι ακμών, με κυκλική αναπαράσταση x_2^2.

Έτσι ο δείκτης κύκλων είναι

$$P_G = \frac{1}{12}(x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2)$$

και ο αριθμός εύρεσης χρωματισμών είναι

$$\frac{1}{12}[(y+z)^4 + 8(y+z)(y^3+z^3) + 3(y^2+z^2)^2]$$

Για $y = z = 1$ παίρνουμε τον ζητούμενο αριθμό

$$\frac{1}{12}[2^4 + 8(2)(2) + 3(2)^2] = 5$$

◇