

Τμήμα Μηχανικών Η.Υ. & Πληροφορικής
Εξέταση στο Μάθημα ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
Ημερομηνία: Σεπτέμβρης 2008

Θέμα 1. (3.5 μονάδες)

Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να τοποθετήσουμε r διακεκριμένες σημαίες σε n διαφορετικούς ιστούς, δεδομένου ότι έχει σημασία η σειρά που τοποθετούνται οι σημαίες σε κάθε ιστό και δεδομένου ότι το πολύ ένας ιστός (οποιοσδήποτε) μπορεί να μείνει κενός.

Θέμα 2. (3.5 μονάδες)

(α) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα μερικών αθροισμάτων για γεννήτριες συναρτήσεις αποδείξτε ότι ισχύει η σχέση

$$\sum_{i=0}^k (-1)^k \binom{n}{i} = (-1)^k \binom{n-1}{k} \quad \text{για ακέραιο } k \geq 0.$$

(β) Έστω ακολουθία με i -οστό όρο a_i τέτοιο ώστε

$$a_i = \sum_{r_1+r_2=i} (-1)^{r_1} \binom{n}{r_1} \frac{1}{r_2!} \quad \text{για ακέραιο } i \geq 0$$

και μη αρνητικούς ακέραιους r_1 και r_2 . Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση της παραπάνω ακολουθίας. Θα πρέπει να έχετε υπόψιν σας ότι ισχύει: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ για $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ιδέες που εφαρμόζουμε για τον υπολογισμό απαριθμητών.

Θέμα 3. (3.5 μονάδες)

Χρωματίζουμε τις κορυφές ενός κανονικού τετράεδρου με 2 χρώματα. Το τετράεδρο μπορεί να περιστρέφεται στο χώρο. Δύο χρωματισμοί θεωρούνται ισοδύναμοι εάν ο ένας μπορεί να προκύψει από τον άλλο, περιστρέφοντας το σώμα στο χώρο. Μετρήστε πόσοι είναι οι μη ισοδύναμοι χρωματισμοί των κορυφών. Οι μεταθέσεις που αντιστοιχούν στις συμμετρίες του σώματος δίνονται από τα παρακάτω είδη περιστροφών:

- η ταυτοτική μετάθεση,
- η περιστροφή 120° γύρω από τους άξονες που συνδέουν μία κορυφή με το κέντρο της απέναντι όψης,
- η περιστροφή 180° γύρω από τους άξονες που συνδέουν τα μέσα απέναντι ακμών.

Καλή επιτυχία!
Λευτέρης Κυρούσης
Αλέξης Καπόρης και Χάρης Ευθυμίου.