# Διακριτά Μαθηματικά*

Διδάσκων: Χ. Μπούρας (bouras@cti.gr)
Φροντιστήριο: Β. Μίχος (emichos@ceid.upatras.gr)

*Οι διαφάνειες (πλην αυτών για τις σχέσεις αναδρομής) έχουν παραχθεί σε μεγάλο βαθμό από τη Δρ. Ε. Παπαϊωάννου, την οποία ευχαριστούμε θερμά για τη διάθεσή τους.

## Πόσους περιττούς ακέραιους μπορούμε να σχηματίσο με τα ψηφία 1,2,3,4,5 οι οποίοι έχουν 4 ψηφία και τα ψηφία αυτά είναι διαφορετικά μεταξύ τους;

- Οι ζητούμενοι 4-ψήφιοι ακέραιοι πρέπει να έχουν 1 ή 3 ή 5 στη δεξιότερη θέση.

  4-ψήφιοι με 1 στη δεξιότερη θέση: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
  4-ψήφιοι με 3 στη δεξιότερη θέση: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
  4-ψήφιοι με 5 στη δεξιότερη θέση: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
- Επομένως, συνολικά $3 \cdot 24 = 72$ αριθμοί.

## Πόσες λέξεις με 0 και 1 υπάρχουν, που έχουν 8 γράμμ και α) ξεκινάνε με 1100 ; β) περιέχουν ακριβώς δύο 1;

- Για το α) $2^4$ λέξεις.
- Για το β) $C(8,2) = \dfrac{P(8,2)}{P(2,2)} = \dfrac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$ λέξεις.

## Το αγγλικό αλφάβητο περιέχει 26 γράμματα εκ των οποίων τα 5 είναι φωνήεντα. α) Πόσες λέξεις μήκους 5 μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας 3 διαφορετικά σύμφωνα και 2 διαφορετικά φωνήεντα; β) Πόσες από αυτές περιέχουν το γράμμα b;

- Για το α):
  Ζητάω λέξεις των 5 χαρακτήρων από τους οποίους 3 πρέπει να είναι σύμφωνα και 2 φωνήεντα - όλα διαφορετικά μεταξύ τους.
  - Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω ποια από τα 5 γράμματα θα είναι τα σύμφωνα; Με $C(5,3) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$ τρόπους. Προφανώς, για κάθε μία τέτοια περίπτωση, τα εναπομείναντα γράμματα θα είναι τα φωνήεντα.
  - Πόσες διαφορετικές 3άδες διαφορετικών συμφώνων μπορώ να έχω; $P(21,3) = 21 \cdot 20 \cdot 19 = 7980$.
  - Πόσες διαφορετικές 2άδες διαφορετικών φωνηέντων μπορώ να έχω; $P(5,2) = 5 \cdot 4 = 20$.

  Άρα, ο ζητούμενος αριθμός λέξεων είναι $10 \cdot 7980 \cdot 20 = 1596000$.

Το αγγλικό αλφάβητο περιέχει 26 γράμματα εκ των οποίων τα 5 είναι φωνήεντα. α) Πόσες λέξεις μήκους 5 μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας 3 διαφορετικά σύμφωνα και 2 διαφορετικά φωνήεντα; β) Πόσες από αυτές περιέχουν το γράμμα b;

- Για το β): υπολογίζω πόσες λέξεις δεν περιέχουν το b και τις αφαιρώ από αυτές της ερώτησης α)
  - Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω ποια από τα 5 γράμματα θα είναι τα σύμφωνα; Με $C(5,3) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$ τρόπους. Προφανώς, για κάθε μία τέτοια περίπτωση, τα εναπομείναντα γράμματα θα είναι τα φωνήεντα.
  - Πόσες διαφορετικές 3άδες διαφορετικών συμφώνων, που δεν είναι b μπορώ να έχω; $P(20,3) = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$.
  - Πόσες διαφορετικές 2άδες διαφορετικών φωνηέντων μπορώ να έχω; $P(5,2) = 5 \cdot 4 = 20$.

  Άρα, το πλήθος των λέξεων πόσες λέξεις δεν περιέχουν το b είναι $10 \cdot 6840 \cdot 20 = 1368000$.

Οπότε οι ζητούμενες λέξεις είναι: $1596000 - 1368000 = 228000$.

# Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί του δεκαδικού συστήματος δεν έχουν δύο ψηφία ίδια;

- Για να είναι τετραψήφιος κάποιος αριθμός δεν πρέπει να έχει 0 στην αριστερότερη θέση, στην οποία μπορεί να βρίσκεται ένα από τα εναπομείναντα 9 ψηφία $(1, ...9)$.
- Άρα, το πλήθος των ζητούμενων αριθμών είναι:

  $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4.536.$

## Πόσες είναι οι συμβολοσειρές της μορφής $ww^R$ μήκου με κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου χωρίς τόνους;

- Τα πέντε πρώτα γράμματα καθορίζουν και τα πέντε επόμενα.
- Επομένως, ασχολούμαι μόνο με τα πέντε πρώτα και υπολογίζω με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να συνθέσω πεντάδες.
- Η επιλογή του κάθε γράμματος είναι ανεξάρτητη και καθένα μπορεί να πάρει 24 διαφορετικές τιμές. Άρα συνολικά, μπορούμε να φτιάξουμε $\underbrace{24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24}_{5 \text{ φορές}} = 24^5$ διαφορετικές λέξεις των πέντε γραμμάτων. (Κανόνας γινομένου)
- Τόσες είναι και οι ζητούμενες συμβολοσειρές, αφού τα πέντε πρώτα γράμματα καθορίζουν και τα πέντε επόμενα.

Έχω 24 αριθμημένες (διαφορετικές) πράσινες μπάλες 24 αριθμημένες κόκκινες μπάλες. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να διαλέξω μία πράσινη και μία κόκκινη μπάλα;

- Πράσινη μπάλα μπορώ να διαλέξω με 24 τρόπους.
  Κόκκινη μπάλα μπορώ να διαλέξω με 24 τρόπους.
  Για να συμβαίνουν και τα δύο μαζί υπάρχουν $24 \cdot 24 = 576$ διαφορετικοί τρόποι. (Κανόνας γινομένου)

## Έχω 24 αριθμημένες (διαφορετικές) πράσινες μπάλες 24 αριθμημένες κόκκινες μπάλες. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να διαλέξω δύο μπάλες χωρίς περιορισμό χρώματος;

Μπορώ να διαλέξω δύο μπάλες με 3 διαφορετικούς τρόπους:

- Να διαλέξω μία κόκκινη και μία πράσινη: αυτό μπορεί να γίνει με $24 \cdot 24 = 24^2$ διαφορετικούς τρόπους. (Κανόνας γινομένου)
- Να διαλέξω δύο κόκκινες: αυτό μπορεί να γίνει με $24 \cdot 23$ διαφορετικούς τρόπους, την πρώτη τη διαλέγω από 24 μπάλες και τη δεύτερη από τις υπόλοιπες 23.
- Να διαλέξω δύο πράσινες: όμοια με πριν. (Κανόνας γινομένου)

Επειδή μπορώ να διαλέξω 2 μπάλες με έναν από τους παραπάνω τρόπους (κανόνας αθροίσματος), αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν συνολικά: $24^2 + 24 \cdot 23 + 24 \cdot 23 = 1680$ διαφορετικοί τρόποι.

# Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 5 άτομα σε σειρά από 12 καθίσματα;

- Διάλεξε ποια 5 από τα 12 διαθέσιμα καθίσματα θα χρησιμοποιηθούν. Αυτό μπορεί να γίνει με $C(12,5) = \frac{12!}{5! \cdot 7!}$ τρόπους.
- Με πόσους τρόπους μπορείς να διατάξεις τα 5 άτομα που πρόκειται να κάτσουν στα καθίσματα αυτά; Με $P(5,5) = 5!$ τρόπους.

Άρα, 5 άτομα μπορούν να καθήσουν σε μια σειρά από 12 καθίσματα με $\frac{12!}{5! \cdot 7!} \cdot 5! = 95.040$ τρόπους.

# Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 5 άτομα σε σειρά από 12 καθίσματα;

## Εναλλακτική λύση (Ι)

- Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να διατάξω τα 12 καθίσματα; $\Leftrightarrow$ Πόσες μεταθέσεις των 12 καθισμάτων υπάρχουν; 12!
- Θεωρώ ότι πάντα τοποθετώ τα 5 άτομα στα πρώτα 5 καθίσματα κάθε μετάθεσης
- Για τις 7-άδες, που μένουν άδειες, δε με ενδιαφέρει η σειρά $\Rightarrow$ για κάθε μετάθεση κρατάω 1 από τις 7! διαφορετικές
- Άρα, έχω συνολικά: $\dfrac{12!}{7!} = 95.040$ τρόπους.

# Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 5 άτομα σε σειρά από 12 καθίσματα;

## Εναλλακτική λύση (II)

- Υποθέτουμε ότι τα άτομα είναι σταθερά και τα καθίσματα 'πάνε' προς τα άτομα...
- Τα καθίσματα δεν είναι πλέον 'ίδια' αλλά έχει το καθένα ένα διαφορετικό 'ταμπελάκι'... Για το πρώτο άτομο υπάρχουν 12 επιλογές καθισμάτων, για το επόμενο 11, κ.ο.κ.
- Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να διατάξω τα 12 καθίσματα σε 5-αδες; Με $P(12,5) = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{12!}{7!}$ διαφορετικούς τρόπους.

## Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν 3 αριθμοί το 1 έως το 300, έτσι ώστε το άθροισμά τους να είναι διαιρετό με 3;

- Χωρίζουμε τους αριθμούς από 1 έως 300, $S = \{1, ..., 300\}$, σε τρία υποσύνολα A, B και Γ έτσι ώστε:
- $A \cup B \cup \Gamma = S$
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cap \Gamma = \emptyset$ και $B \cap \Gamma = \emptyset$
-
  - $A = \{x \in S : x \mod 3 = 0\}$, $A = \{3, 6, 9, ..., 300\}$
  - $B = \{y \in S : y \mod 3 = 1\}$, $B = \{1, 4, 7, ..., 298\}$
  - $\Gamma = \{z \in S : z \mod 3 = 2\}$, $\Gamma = \{2, 5, 8, ..., 299\}$
  - $|A| = |B| = |\Gamma| = 100$
- Για να είναι το άθροισμα τριών αριθμών διαιρετό με 3, πρέπει:
  - είτε και οι τρεις να ανήκουν στο $A$, είτε και οι τρεις στο $B$, είτε και οι τρεις στο Γ, δηλ. $\binom{100}{3} + \binom{100}{3} + \binom{100}{3}$.
  - είτε ένας αριθμός να ανήκει σε καθένα από τα τρία αυτά υποσύνολα, δηλ. $\binom{100}{1}\binom{100}{1}\binom{100}{1}$.
- Άρα συνολικά: $3 \cdot \binom{100}{3} + 100^3 = 1.485.100$ τρόποι.

# Ποιος είναι ο αριθμός των διαιρετών του 180;

- $180 = 2 \cdot 90 = 2 \cdot 2 \cdot 45 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
- Από Θεωρία Αριθμών, διαιρέτες του 180 είναι οι αριθμοί της μορφής $2^k \cdot 3^n \cdot 5^m$ με $0 \leq k \leq 2$, $0 \leq n \leq 2$ και $0 \leq m \leq 1$.
- Μπορώ να επιλέξω το $k$ με 3 τρόπους, το $n$ με 3 τρόπους και το $m$ με 2 τρόπους και θέλω όλα αυτά να ισχύουν μαζί.
- Έπομένως, έχω συνολικά, $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ τρόπους. (Κανόνας γινομένου)