Στοιχειώδης συνδυαστική

- Διωνυμικοί Συντελεστές

Διωνυμικοί Συντελεστές

$$(1+x)^n = \underbrace{\overbrace{(1+x)}^{\text{διώνυμο}} \cdot (1+x) \cdot \ldots \cdot (1+x)}_{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

- Για τον συντελεστή του x^k:
  Από κάθε διώνυμο μπορούμε να πάρουμε ένα 'x' για να σχηματίσουμε το x^k, μπορεί και όχι. Επομένως, έχουμε n ευκαιρίες (όσα και τα διώνυμα) να πάρουμε k αντικείμενα 'x'. Ο αριθμός των τρόπων, που μπορούμε να πάρουμε k αντικείμενα από n χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά, είναι: $\binom{n}{k}$.
- Γενικά:
  $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Ιδιότητες Διωνυμικών Συντελεστών

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

   Οι τρόποι, που μπορώ να διαλέξω k αντικείμενα από n είναι ίσοι με τους τρόπους, που μπορώ να διαλέξω τα (υπόλοιπα) $n-k$ αντικείμενα από τα n.

2. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$

   Έστω ότι ξεχωρίζω ένα αντικείμενο από τα $n+1$. Αν πάρω $k+1$ αντικείμενα συνολικά, μπορώ να συμπεριλάβω και αυτό, που ξεχώρισα ή όχι. Στην πρώτη περίπτωση πρέπει να πάρω τα υπόλοιπα k αντικείμενα από τα (υπόλοιπα) n, ενώ στην δεύτερη, πρέπει να πάρω και τα $k+1$ αντικείμενα από τα n.

3. $\binom{n+r+1}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k}$

Ιδιότητες Διωνυμικών Συντελεστών

4. $\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r}$

5. $\binom{n}{r} = \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}$

   Για να διαλέξω r αντικείμενα από n αρκεί να διαλέξω πρώτα ένα αντικείμενο, και τα υπόλοιπα $r-1$ αντικείμενα να τα διαλέξω από τα υπόλοιπα $n-1$. Το ‘πρώτο’ αντικείμενο μπορώ να το επιλέξω με n τρόπους, και τα υπόλοιπα $r-1$ με $\binom{n-1}{r-1}$ τρόπους. Επειδή, όμως, δεν έχει σημασία ποιο από τα r αντικείμενα είναι πρώτο (δηλαδή θα μπορουσε να είναι πρώτο οποιοδήποτε από τα υπόλοιπα $r-1$ αντικείμενα, που επελέγησαν στο συνδυασμό, χωρίς να προκύπτει διαφορετικός συνδυασμός), διαιρώ με r.

Ιδιότητες

- $C(n,r) = C(n-1,r) + C(n-1,r-1)$
  Ένας συνδυασμός μπορεί είτε να περιέχει το n-οστό στοιχείο είτε όχι.
  Υπάρχουν $C(n-1,r)$ συνδυασμοί, που δεν περιέχουν το n-οστό στοιχείο και $C(n-1,r-1)$ συνδυασμοί, που το περιέχουν.
- $C(n,r) = \frac{n}{r}C(n-1,r-1)$
  Κάθε στοιχείο μετέχει σε $C(n-1,r-1)$ συνδυασμούς των n ανά r.
  Συνολικές συμμετοχές για τα n στοιχεία: $n \cdot C(n-1,r-1)$
  Οι συνολικές συμμετοχές στοιχείων είναι $r \cdot C(n,r)$.

Διωνυμικοί συντελεστές

- $(1+x)$: διώνυμο
- $(1+x)^n$: πολυώνυμο βαθμού n
- Ο συντελεστής του x^r στο πολυώνυμο ισούται με το πλήθος των τρόπων να επιλέξουμε r από τους n όρους x, που εμφανίζονται στο γινόμενο $\underbrace{(1+x)\ldots(1+x)}_{n \text{ φορές}}$.
- Επομένως, συντελεστής του x^r στο πολυώνυμο: $(1+x)^n = C(n,r)$
- Ανάπτυγμα διωνύμου του Νεύτωνα: $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)x^r$
- Γενικά: $(s+t)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)s^r t^{n-r}$

Ποιο είναι ο σταθερός όρος στο ανάπτυγμα του $(x^2 + \frac{1}{x})^{12}$;

- Ισχύει $(s+t)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r) s^r t^{n-r}$
- Για $s = x^2$ και $t = \frac{1}{x} = x^{-1}$ έχουμε:
- $(x^2 + \frac{1}{x})^{12} = (x^2 + x^{-1})^{12} = \sum_{r=0}^{12} C(n,r) x^{2r} x^{-12+r} =$
  $\sum_{r=0}^{12} C(12,r) x^{3r-12}$
- Ο σταθερός όρος είναι ο συνετελεστής του x^0. Δηλαδή, πρέπει $3r - 12 = 0 \Leftrightarrow r = 4$. Επομένως, ο ζητούμενος συντελεστής είναι ο $C(12,4) = 495$.

Για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$

- Για κάθε x ισχύει: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$
- Για $x = 1$, η παραπάνω σχέση δίνει:
  $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = (1+1)^n = 2^n$

Για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει: $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$

- Για κάθε x, ισχύει: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$
- Για $x = -1$, η παραπάνω σχέση δίνει: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i = 0$
- $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \binom{n}{5} + \dots = 0 \Rightarrow$
- $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$

Για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει: $\sum_{i=0}^{n} i \cdot \binom{n}{i} = n2^{n-}$

- Για κάθε x, ισχύει: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$
- Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της ισότητας:
  $\sum_{i=0}^{n} i \cdot \binom{n}{i} x^{i-1} = n(1+x)^{n-1}$
- Θέτουμε $x = 1$ και η παραπάνω σχέση δίνει:
  $\sum_{i=0}^{n} i \cdot \binom{n}{i} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$

Για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}$

- Επειδή $\binom{n}{i}=\binom{n}{n-i}$, είναι $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$
- $\binom{2n}{n}$ σημαίνει να διαλέξουμε n από $2n$ αντικείμενα. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής:
  - Χωρίζουμε τα $2n$ αντικείμενα σε 2 ομάδες, ώστε κάθε μία να έχει n αντικείμενα.
  - Για $i=0,1,2,3,\ldots,n$, διαλέγουμε i αντικείμενα από την πρώτη ομάδα με $\binom{n}{i}$ τρόπους και $n-i$ αντικείμενα από τη δεύτερη ομάδα με $\binom{n}{n-i}$ τρόπους.
  - Για $i=0,1,2,3,\ldots,n$, υπάρχουν $\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$ τρόποι επιλογής.
  - Τα ενδεχόμενα για διαφορετικές τιμές του i είναι αμοιβαία αποκλειόμενα, οπότε με κανόνα αθροίσματος έχουμε:
    $$\binom{2n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$$

Αποδείξτε ότι: $\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$

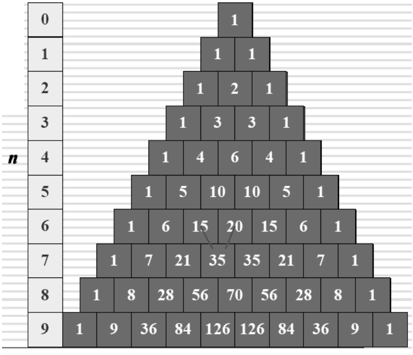
- $\binom{m+n}{r}$: με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω r από ένα σύνολο με m αριθμημένες πράσινες μπάλες και n αριθμημένες κόκκινες μπάλες.
- Είναι σαν να διαλέγω (1) $r-k$ από τις m αριθμημένες πράσινες μπάλες και (2) τις υπόλοιπες k από τις n αριθμημένες κόκκινες μπάλες.
- Το (1) μπορεί να γίνει με $\binom{m}{r-k}$ τρόπους και το (2) με $\binom{n}{k}$ τρόπους. Άρα, συνολικά υπάρχουν $\binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$ τρόποι για κάθε τιμή του k.
- Τα γεγονότα είναι αμοιβαία αποκλειόμενα για διαφορετικές τιμές του k. Οπότε, από κανόνα αθροίσματος, υπάρχουν συνολικά $\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$ τρόποι.

Αποδείξτε ότι: $\displaystyle\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$

- Άμεση συνέπεια: $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

Τρίγωνο του Pascal

- Αναδρομικός τρόπος υπολογισμού διωνυμικών συντελεστών.



$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, & \text{αν } 0 < k < n \\ 1, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$