



Διακριτά Μαθηματικά

Φροντιστήριο

Στοιχειώδης Συνδυαστική I

email: kaloger@ceid.upatras.gr

Ώρες γραφείου: Παρασκευή 11.00-12.00



- Κανόνας Αθροίσματος
- Κανόνας Γινομένου
- Διατάξεις r αντικειμένων επιλεγμένων από n αντικείμενα χωρίς επανατοποθέτηση:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- Αντιμεταθέσεις r αντικειμένων: $P(r, r) = r!$
- Συνδυασμοί r αντικειμένων επιλεγμένων από n αντικείμενα χωρίς επανατοποθέτηση:

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r},$$



Στο πανεπιστήμιο υπάρχουν 7 μαθήματα πρωινά και μαθήματα απογευματινά. Πόσες επιλογές έχει ένας σπουδαστής να για να πάρει 1 πρωινό και 1 απογευματινό μάθημα;



Στο πανεπιστήμιο υπάρχουν 7 μαθήματα πρωινά και μαθήματα απογευματινά. Πόσες επιλογές έχει ένας σπουδαστής να για να πάρει 1 πρωινό και 1 απογευματινό μάθημα;

Υπάρχουν $7 \times 5 = 35$ επιλογές για ένα σπουδαστή, που θέλει να πάρει 1 πρωινό και 1 απογευματινό μάθημα.



Στο πανεπιστήμιο υπάρχουν 7 μαθήματα πρωινά και μαθήματα απογευματινά. Πόσες επιλογές έχει ένας σπουδαστής που ενδιαφέρεται να πάρει 1 μόνο μάθημα (αδιαφορώντας για απόγευμα ή πρωί);



Στο πανεπιστήμιο υπάρχουν 7 μαθήματα πρωινά και μαθήματα απογευματινά. Πόσες επιλογές έχει ένας σπουδαστής που ενδιαφέρεται να πάρει 1 μόνο μάθημα (αδιαφορώντας για απόγευμα ή πρωί);

Για ένα σπουδαστή, που θέλει να πάρει μόνο 1 μάθημα (αδιαφορώντας για απόγευμα ή πρωί) υπάρχουν $7 + 5 = 12$ επιλογές.



Με πόσους τρόπους μπορούν 3 εξετάσεις να προγραμματιστούν μέσα σε μία περίοδο 5 ημερών, έτσι ώστε να μην έχουμε δύο εξετάσεις την ίδια μέρα;



Με πόσους τρόπους μπορούν 3 εξετάσεις να προγραμματιστούν μέσα σε μία περίοδο 5 ημερών, έτσι ώστε να μην έχουμε δύο εξετάσεις την ίδια μέρα;

Επειδή, πρόκειται για συγκεκριμένες εξετάσεις, είναι φανερό ότι έχει σημασία και η σειρά, που θα γίνουν αυτές.

Άρα, η απάντηση είναι $P(5, 3) = 60$.



Με πόσους τρόπους ένας μάγειρας μπορεί να προγραμματίσει κατά την διάρκεια μιας εβδομάδας 3 γεύματα με κρέας;



Με πόσους τρόπους ένας μάγειρας μπορεί να προγραμματίσει κατά την διάρκεια μιας εβδομάδας 3 γεύματα με κρέας;

Επειδή, δεν καθορίζονται τα γεύματα κρέατος, η απάντηση είναι ο αριθμός των συνδυασμών 3 ημερών από τις 7, δηλαδή $C(7, 3) = 35$.



Πόσοι πενταψήφιοι ακέραιοι υπάρχουν, οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι του 53000 και έχουν ταυτόχρονα τις εξής ιδιότητες: α) τα ψηφία τους είναι διαφορετικά και β) δεν εμφανίζονται σε αυτούς τα ψηφία 0 και 9;



Πόσοι πενταψήφιοι ακέραιοι υπάρχουν, οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι του 53000 και έχουν ταυτόχρονα τις εξής ιδιότητες: α) τα ψηφία τους είναι διαφορετικά και β) δεν εμφανίζονται σε αυτούς τα ψηφία 0 και 9;

- Αριθμοί, που ξεκινάνε από 53 και ακολουθούν 3 ψηφία, που δε μπορούν να είναι 0 και 9, ούτε 5 και 3 και πρέπει να είναι και διαφορετικά μεταξύ τους: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.
- Αριθμοί, που ξεκινάνε από 5 και ακολουθούν 4 ψηφία, που δε μπορούν να είναι 0 και 9, ούτε 5, πρέπει να είναι και διαφορετικά μεταξύ τους και τα ψηφία της αριστερότερης θέσης πρέπει να είναι μεγαλύτερα του 3: $4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 480$.
- 5-ψήφιοι αριθμοί, οι οποίοι στην αριστερότερη θέση έχουν ψηφίο μεγαλύτερο του 5 και όχι 0 ή 9, στην επόμενη θέση όχι ό,τι στην προηγούμενη ούτε 0 ή 9, στην επόμενη θέση όχι ό,τι στις δύο προηγούμενες ούτε 0 ή 9, κοκ:
 $3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 2520$.
- Επομένως, συνολικά $120 + 480 + 2520 = 3120$ αριθμοί.



Έχω 5 Ελληνικά, 7 Αγγλικά και 10 Ισπανικά βιβλία (συνολικά 22). (α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να διαλέξω δύο βιβλία; (β) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να διαλέξω δύο βιβλία διαφορετικής γλώσσας;



Έχω 5 Ελληνικά, 7 Αγγλικά και 10 Ισπανικά βιβλία (συνολικά 22). (α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να διαλέξω δύο βιβλία; (β) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να διαλέξω δύο βιβλία διαφορετικής γλώσσας;

- Για το (α):
 - Το πρώτο το διαλέγω από 22 διαθέσιμα και το δεύτερο από τα υπόλοιπα 21 διαθέσιμα.
- Άρα, συνολικά με $22 \cdot 21 = 462$ διαφορετικούς τρόπους.
- Για το (β):
Μπορώ να διαλέξω:
 - Ελληνικό και Αγγλικό με $5 \cdot 7 = 35$ τρόπους
 - Ελληνικό και Ισπανικό με $5 \cdot 10 = 50$ τρόπους
 - Αγγλικό και Ισπανικό με $7 \cdot 10 = 70$ τρόπους

Άρα, συνολικά με $35 + 50 + 70 = 155$ διαφορετικούς τρόπους.

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να διαλέξω
να βάλω σε σειρά 5 από 20 μαθητές;





Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να διαλέξω να βάλω σε σειρά 5 από 20 μαθητές;

- Με $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = P(20, 5) = \frac{20!}{15!}$ διαφορετικούς τρόπους.

Πόσους διαιρέτες έχει ο αριθμός 1400;





- $1400 = 2 \cdot 700 = 2 \cdot 2 \cdot 350 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 175 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 35 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$
- Από Θεωρία Αριθμών, διαιρέτες του 1400 είναι οι αριθμοί της μορφής $2^k \cdot 5^n \cdot 7^m$ με $0 \leq k \leq 3$, $0 \leq n \leq 2$ και $0 \leq m \leq 1$.
- Μπορώ να επιλέξω το k με 4 τρόπους, το n με 3 τρόπους και το m με 2 τρόπους και θέλω όλα αυτά να ισχύουν μαζί.
- Έπομένως, έχω συνολικά, $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ τρόπους.

Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν n άτομα
ώστε να καθίσουν σε κύκλο;





Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν n άτομα
ώστε να καθίσουν σε κύκλο;

Με απλή συνδυαστική: Διαλέγω αυθαίρετα ένα άτομο και το τοποθετώ στη βόρεια θέση. Αυτό δεν εισάγει κάτι στο μέτρημα. Τα υπόλοιπα $n - 1$ άτομα μπορούν να τοποθετηθούν αριστερόστροφα (ή δεξιόστροφα δεν έχει σημασία) κατά όλες τις δυνατές αντιμεταθέσεις των $n - 1$, δηλαδή με $(n - 1)!$ τρόπους.



Πόσους περιττούς ακέραιους μπορούμε να σχηματίσο
με τα ψηφία 1,2,3,4,5 οι οποίοι έχουν 4 ψηφία και τα
ψηφία αυτά είναι διαφορετικά μεταξύ τους;



Πόσους περιττούς ακέραιους μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 1,2,3,4,5 οι οποίοι έχουν 4 ψηφία και τα ψηφία αυτά είναι διαφορετικά μεταξύ τους;

- Οι ζητούμενοι 4-ψήφιοι ακέραιοι πρέπει να έχουν 1 ή 3 ή 5 στη δεξιότερη θέση.
4-ψήφιοι με 1 στη δεξιότερη θέση: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
4-ψήφιοι με 3 στη δεξιότερη θέση: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
4-ψήφιοι με 5 στη δεξιότερη θέση: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
- Επομένως, συνολικά $3 \cdot 24 = 72$ αριθμοί.

Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί του δεκαδικού συστήματος
έχουν δύο ψηφία ίδια;





Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί του δεκαδικού συστήματος έχουν δύο ψηφία ίδια;

- Για να είναι τετραψήφιος κάποιος αριθμός δεν πρέπει να έχει 0 στην αριστερότερη θέση, στην οποία μπορεί να βρίσκεται ένα από τα εναπομείναντα 9 ψηφία (1, ...9).
- Άρα, το πλήθος των ζητούμενων αριθμών είναι:
 $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4.536$.



Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 5 άτομα σε
σειρά από 12 καθίσματα;



Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 5 άτομα σε σειρά από 12 καθίσματα;

- Διάλεξε ποια 5 από τα 12 διαθέσιμα καθίσματα θα χρησιμοποιηθούν. Αυτό μπορεί να γίνει με $C(12, 5) = \frac{12!}{5! \cdot 7!}$ τρόπους.
- Με πόσους τρόπους μπορείς να διατάξεις τα 5 άτομα, που πρόκειται να κάτσουν στα καθίσματα αυτά; Με $P(5, 5) = 5!$ τρόπους.

Άρα, 5 άτομα μπορούν να καθήσουν σε μια σειρά από 12 καθίσματα με $\frac{12!}{5! \cdot 7!} \cdot 5! = 95.040$ τρόπους.



Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 5 άτομα σε σειρά από 12 καθίσματα;

Εναλλακτική λύση



Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 5 άτομα σε σειρά από 12 καθίσματα;

Εναλλακτική λύση

- Υποθέτουμε ότι τα άτομα είναι σταθερά και τα καθίσματα 'πάνε' προς τα άτομα...
- Τα καθίσματα δεν είναι πλέον 'ίδια', αλλά έχει το καθένα ένα διαφορετικό 'ταμπελάκι'... Για το πρώτο άτομο υπάρχουν 12 επιλογές καθισμάτων, για το επόμενο 11, κ.ο.κ.
- Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να διατάξω τα 12 καθίσματα σε 5-αδες; Με $P(12, 5) = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{12!}{7!}$ διαφορετικούς τρόπους.