Διακριτά Μαθηματικά

Φροντιστήριο

Στοιχειώδης Συνδυαστική II

Επανάληψη

- Κανόνας Αθροίσματος
- Κανόνας Γινομένου
- Χωρίς επαναλήψεις στοιχείων:
  - $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
  - $C(n, r) = \binom{n}{r}$
- Με επαναλήψεις στοιχείων:
  - $P(n, r) = n^r$
  - $C(n, r) = \binom{n+r-1}{r}$
- Ομάδες μη διακεκριμένων στοιχείων: $\frac{n!}{q_1!q_2!\ldots q_t!}$

Να δειχθεί ότι $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$

Να δειχθεί ότι $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$

Έχουμε:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{(n-r+r)(n-1)!}{r!(n-r)!} =$$

$$= \frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!} + \frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} =$$

$$= \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Από έναν μεγάλο αριθμό από νομίσματα των 0,05E, 0,10E, 0,20E και 0,50E, με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 6 κέρματα;

Από έναν μεγάλο αριθμό από νομίσματα των 0,05E, 0,10E, 0,20E και 0,50E, με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 6 κέρματα;

- Διαλέγω 6 $(= r)$ κέρματα από ένα σύνολο με 4 $(= n)$ αντικείμενα και επιτρέπονται οι επαναλήψεις $\Rightarrow$ $C(n + r - 1, r) = C(4 + 6 - 1, 6) = C(9, 6) = \dfrac{9!}{6! \cdot 3!} = 84$

Έχουμε άσπρες, πράσινες και κόκκινες μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε r από αυτές;

Έχουμε άσπρες, πράσινες και κόκκινες μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε r από αυτές;

- Με απλή συνδυαστική: θέλω να διαλέξω r από 3 αντικείμενα με επαναλήψεις. Αυτό μπορεί να γίνει με

$$\binom{3+r-1}{r} = \binom{2+r}{r}$$

τρόπους.

Πόσες φορές θα εκτελεστεί η εντολή writeln στο πιο κ τμήμα ενός προγράμματος Pascal

```
For i := 1 to 20 do
  For j := 1 to i do
        For k := 1 to j do
          writeln (i*j+k);
```

Πόσες φορές θα εκτελεστεί η εντολή writeln στο πιο κ… τμήμα ενός προγράμματος Pascal

```
For i := 1 to 20 do
  For j := 1 to i do
        For k := 1 to j do
          writeln (i*j+k);
```

Συμπεραίνουμε από τους συντακτικούς κανόνες της εντολής For ότι κάθε φορά, που θα εκτελείται η εντολή writeln , ισχύει η συνθήκη $1 \leq k \leq j \leq i \leq 20$. Ζητάμε, λοιπόν, να βρούμε τον αριθμό των τρόπων να συνδυάσουμε τα i, j, k, επιτρέποντας επαναλήψεις, με τιμές από $1, 2, \ldots, 20$.
Αυτός είναι $\binom{20+3-1}{3} = 1540$. Επομένως, η εντολή writeln θα εκτελεστεί 1540 φορές.

Ποιο είναι το πλήθος των διαφορετικών διατάξεων γραμμάτων που φτιάχνονται από τα γράμματα, που περιέχονται στην έκφραση ‘‘μια πάπια μα ποια πάπια’’;

Ποιο είναι το πλήθος των διαφορετικών διατάξεων γραμμάτων που φτιάχνονται από τα γράμματα, που περιέχονται στην έκφραση "μια πάπια μα ποια πάπια";

Παρατηρούμε ότι:

υπάρχουν	$q_1 = 2$	γράμματα	είδους	'μ',
,,	$q_2 = 4$	,,	,,	'ι',
,,	$q_3 = 7$	,,	,,	'α',
,,	$q_4 = 5$	,,	,,	'π',
,,	$q_5 = 1$	,,	,,	'ο'.

Άρα, συνολικά υπάρχουν

$$\frac{19!}{2!4!7!5!1!} = 4.190.266.080$$

δυνατές διατάξεις γραμμάτων.

Με πόσους τρόπους μπορούν να βαφούν 12 γραφεία, ώστε 3 απ' αυτά να είναι κόκκινα, 2 ροζ, 2 λευκά και τα υπόλοιπα πράσινα;

Με πόσους τρόπους μπορούν να βαφούν 12 γραφεία, ώστε 3 απ' αυτά να είναι κόκκινα, 2 ροζ, 2 λευκά και τα υπόλοιπα πράσινα;

Για να υπολογίσουμε τους ζητούμενους τρόπους βαφής των γραφείων σκεφτόμαστε ως εξής: Παίρνουμε μία τυχαία διάταξη των γραφείων. Θεωρούμε ότι σε κάθε τέτοια διάταξη (μετάθεση) τα 3 πρώτα σε σειρά γραφεία θα τα βάψουμε κόκκινα, τα επόμενα 2 ροζ, τα επόμενα 2 λευκά και τα υπόλοιπα 5 πράσινα. Αφού, τα 3 πρώτα γραφεία θα είναι κόκκινα, δεν μας ενδιαφέρει η σειρά τους (μέσα στην τριάδα) και ομοίως, δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των γραφείων μέσα στο ροζ και λευκό ζευγάρι, όπως και μέσα στην πράσινη πεντάδα. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο αριθμός των διατάξεων r αντικειμένων είναι $r!$, έχουμε σαν απάντηση:

$$\frac{12!}{3!2!2!5!} = 166320$$

.

Να αποδειχθεί ότι το $(k!)!$ διαιρείται ακριβώς από το $(k!)^{(k-1)!}$

Να αποδειχθεί ότι το $(k!)!$ διαιρείται ακριβώς από το $(k!)^{(k-1)!}$

Θεωρούμε $k!$ αντικείμενα και τα χωρίζουμε σε $(k-1)!$ ομάδες με k μη διακεκριμένα στοιχεία η κάθε μία. Το πλήθος των συνδυασμών των αντικειμένων αυτών είναι $\frac{(k!)!}{(k!)^{(k-1)!}}$.

Ο αριθμός όμως αυτός πρέπει να είναι ακέραιος.

Ένα ντόμινο είναι κατασκευασμένο, έτσι ώστε σε καθ από τα δύο τετράγωνα κάθε κομματιού να υπάρχουν μία, δύο, τρεις, τέσσερις, πέντε ή έξι τελείες ή να είναι κενό. Πόσα διαφορετικά κομμάτια μπορεί να περιέχει αυτό το ντόμινο;

Ένα ντόμινο είναι κατασκευασμένο, έτσι ώστε σε καθ από τα δύο τετράγωνα κάθε κομματιού να υπάρχουν μία, δύο, τρεις, τέσσερις, πέντε ή έξι τελείες ή να είναι κενό. Πόσα διαφορετικά κομμάτια μπορεί να περιέχει αυτό το ντόμινο;

Ο αριθμός των κομματιών στο ντόμινο ισούται με τον αριθμό των τρόπων επιλογής δύο αντικειμένων με επαναλήψεις από τα επτά διαφορετικά αντικείμενα “ένα”, “δύο”, “τρία”, “τέσσερα”, “πέντε”, “έξι”και “κενό”. Ο αριθμός αυτός είναι ίσος με:
$\binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = 28.$

Πόσοι από τους ακέραιους αριθμούς, που βρίσκονται μεταξύ του 1 και του 10000000000 περιέχουν το ψηφίο 1 και πόσοι δεν το περιέχουν;

Πόσοι από τους ακέραιους αριθμούς, που βρίσκονται μεταξύ του 1 και του 10000000000 περιέχουν το ψηφίο 1 και πόσοι δεν το περιέχουν;

Μεταξύ των αριθμών 0 και 9999999999 υπάρχουν 9^{10} ακέραιοι, που δεν περιέχουν το ψηφίο 1. Αυτό συμβαίνει, γιατί το πλήθος των αριθμών αυτών ισούται με τον αριθμό των διατάξεων 9 στοιχείων (των 0,2,3,...,9) σε 10 θέσεις με επανάληψη. Συνεπώς, μεταξύ του 1 και του 10000000000 υπάρχουν $9^{10} - 1$ ακέραιοι, που δεν περιέχουν το ψηφίο 1 και επομένως, $10^{10} - 9^{10} + 1$ ακέραιοι, που περιέχουν το ψηφίο 1.

Μεταξύ $2n$ αντικειμένων τα n είναι ίδια. Βρείτε τον αριθμό των επιλογών n αντικειμένων απ' αυτά τα $2n$ αντικείμενα.

Μεταξύ $2n$ αντικειμένων τα n είναι ίδια. Βρείτε τον αριθμό των επιλογών n αντικειμένων απ' αυτά τα $2n$ αντικείμενα.

Ο ζητούμενος αριθμός των επιλογών ισούται με το άθροισμα:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

γιατί μπορούμε να επιλέξουμε n αντικείμενα από τα $2n$ ως εξής: Είτε παίρνοντας κατά 1 τρόπο τα n όμοια αντικείμενα και κατά $\binom{n}{0}$ τρόπους μηδέν αντικείμενα από τα υπόλοιπα n, είτε παίρνοντας κατά 1 τρόπο $n-1$ από τα ν όμοια αντικείμενα και κατά $\binom{n}{1}$ τρόπους 1 αντικείμενο από τα υπόλοιπα ν κ.ο.κ., είτε τέλος παίρνοντας 0 από τα ν όμοια αντικείμενα και κατά $\binom{n}{n}$ τρόπους n αντικείμενα από τα υπόλοιπα n διαφορετικά αντικείμενα. Άρα, ο ζητούμενος αριθμός είναι,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Να υπολογιστεί το πλήθος των τρόπων που ένα σύνολο από r μη διακεκριμένα αντικείμενα ($r \geq 6$) μπορεί να χωριστεί σε τρία υποσύνολα διακεκριμένα, ανά δυο ξένα μεταξύ τους, έτσι ώστε κάθε υποσύνολο να έχει τουλάχιστον δυο αντικείμενα (η ένωση των τριών υποσυνόλων θα περιέχει όλα τα r αντικείμενα).

Να υπολογιστεί το πλήθος των τρόπων που ένα σύνολο από r μη διακεκριμένα αντικείμενα ($r \geq 6$) μπορεί να χωριστεί σε τρία υποσύνολα διακεκριμένα, ανά δυο ξένα μεταξύ τους, έτσι ώστε κάθε υποσύνολο να έχει τουλάχιστον δυο αντικείμενα (η ένωση των τριών υποσυνόλων θα περιέχει όλα τα r αντικείμενα).

Για να ικανοποιήσουμε τον περιορισμό ¨κάθε υποσύνολο να περιέχει τουλάχιστον δυο αντικείμενα¨, παίρνουμε 6 αντικείμενα και τοποθετούμε από δυο σε κάθε υπυσύνολο. Αφού τα αντικείμενα είναι μη διακεκριμένα, δεν μας ενδιαφέρει ποια ακριβώς αντικείμενα θα τοποθετήσουμε σε κάθε υποσύνολο, αρκεί να είναι δυο. Ο συνολικός αριθμός των τρόπων να μοιράσουμε τα υπόλοιπα $(r-6)$ αντικείμενα προκύπτει ως εξής:

Να υπολογιστεί το πλήθος των τρόπων που ένα σύνολο από r μη διακεκριμένα αντικείμενα ($r \geq 6$) μπορεί να χωριστεί σε τρία υποσύνολα διακεκριμένα, ανά δυο ξένα μεταξύ τους, έτσι ώστε κάθε υποσύνολο να έχει τουλάχιστον δυο αντικείμενα (η ένωση των τριών υποσυνόλων θα περιέχει όλα τα r αντικείμενα).

Σε κάθε αντικείμενο από τα $(r-6)$ αναθέτουμε ένα υποσύνολο από τα τρία. Τον αριθμό των τρόπων να κάνουμε κάτι τέτοιο μας τον δίνουν οι συνδυασμοί των $(r-6)$ αντικειμένων από 3 με επανάληψη, είναι δηλαδή: $\binom{r-6+3-1}{r-6} = \binom{r-4}{r-6} = \frac{(r-4)(r-5)}{2}$

Πόσες δυαδικές ακολουθίες 32 ψηφίων έχουν ακριβώς άσσους;

Πόσες δυαδικές ακολουθίες 32 ψηφίων έχουν ακριβώς άσσους;

- ‘δυαδικές ακολουθίες των 32 θέσεων με 7 ακριβώς άσσους’ $\iff$ ‘επιλέγω 7 από τις 32 θέσεις για να φιλοξενήσουν τους άσσους και βάζω 0 σε όλες τις υπόλοιπες’

Υπάρχουν τόσοι τρόποι να το κάνω αυτό, όσοι είναι οι τρόποι να διαλέξω 7 από 32 στοιχεία, δηλ.:

$C(32,7) = \frac{26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 3.365.856.$