Διακριτά Μαθηματικά

Φροντιστήριο

Στοιχειώδης Συνδυαστική ΙΙΙ

Επανάληψη

- Κανόνας Αθροίσματος
- Κανόνας Γινομένου
- Χωρίς επαναλήψεις στοιχείων:
  - $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
  - $C(n, r) = \binom{n}{r}$
- Με επαναλήψεις στοιχείων:
  - $P(n, r) = n^r$
  - $C(n, r) = \binom{n+r-1}{r}$
- Ομάδες μη διακεκριμένων στοιχείων: $\frac{n!}{q_1! q_2! \ldots q_t!}$

Διανομή αντικειμένων σε υποδοχές:

- n διακεκριμένες υποδοχές
- r Διαφορετικά αντικείμενα:
  - Δε μετράει η σειρά: $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{r} = n^r$
  - Μετράει η σειρά: $\dfrac{(n+r-1)!}{(n-1)!}$
- r Ίδια αντικείμενα: $\dfrac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \dbinom{n+r-1}{r}$

Με πόσους τρόπους r ίδια αντικείμενα μπορούν να τοποθετηθούν σε n υποδοχές, έτσι ώστε όλες οι υποδοχές να πάρουν τουλάχιστον 1 αντικείμενο;

Με πόσους τρόπους r ίδια αντικείμενα μπορούν να τοποθετηθούν σε n υποδοχές, έτσι ώστε όλες οι υποδοχές να πάρουν τουλάχιστον 1 αντικείμενο;

- Τοποθετούμε 1 αντικείμενο σε κάθε μία από τις n υποδοχές για να μη μείνει καμία άδεια. Μένουν $r - n$ αντικείμενα.

  Έχουμε $r - n$ ίδια αντκείμενα, τα οποία μπορούμε να τοποθετήσουμε στις n υποδοχές με $\binom{n+r-n-1}{r-n}$ τρόπους.

Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να καθίσουν 5 φοιτητές σ μία σειρά από 12 έδρανα;

Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να καθίσουν 5 φοιτητές σ μία σειρά από 12 έδρανα;

Διατάσσουμε τους πέντε φοιτητές σε μία σειρά κατά 5! τρόπους και στη συνέχεια, μοιράζουμε τα επτά άδεια έδρανα αυθαίρετα είτε μεταξύ των φοιτητών, είτε στις δύο άκρες της σειράς. Ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορεί να γίνει αυτή η μοιρασιά, είναι ίσος με τον αριθμό των τρόπων τοποθέτησης επτά όμοιων σφαιρών σε έξι διαφορετικά κουτιά και είναι ίσος με $\binom{6+7-1}{7}$. Συνεπώς, ο ζητούμενος αριθμός τρόπων είναι, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου: $5! \cdot \binom{12}{7} = \frac{12!}{7!}$.

Έχω n θέσεις στη σειρά και θέλω να τοποθετήσω k φοιτητές για να γράψουν εξετάσεις, ώστε μεταξύ κάθε δύο φοιτητών να υπάρχει μία κενή θέση ($n \geq 2k - 1$). Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να το κάνω;

Έχω n θέσεις στη σειρά και θέλω να τοποθετήσω k φοιτητές για να γράψουν εξετάσεις, ώστε μεταξύ κάθε δύο φοιτητών να υπάρχει μία κενή θέση ($n \geq 2k-1$). Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να το κάνω;

- Βγάζω φοιτητές και θρανία από την αίθουσα.

  Δίνω ένα θρανίο σε κάθε φοιτητή (1 τρόπος υπάρχει, αφού τα θρανία είναι ίδια, δεσμεύω k).

  Διατάσσω τους φοιτητές με τα θρανία τους: υπάρχουν $k!$ διαφορετικοί τρόποι, αφού οι φοιτητές είναι διαφορετικοί.

  Τοποθετώ ένα άδειο θρανίο ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι φοιτητών (1 τρόπος, αφού τα θρανία είναι ίδια, δεσμεύω $k-1$ θρανία).

Μοιράζω τα $n-2k+1$ ίδια θρανία, που περίσσεψαν σε $k+1$ διαφορετικές υποδοχές. Αυτό γίνεται με:

$$\binom{k+1+n-2k+1-1}{n-2k+1} = \binom{n-k+1}{n-2k+1}$$

Άρα, συνολικά υπάρχουν $k! \cdot \binom{n-k+1}{n-2k+1}$ διαφορετικοί τρόποι.

Θέλουμε να στείλουμε ένα μήνυμα με 12 διαφορετικά σύμβολα πάνω από ένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι. Επιπλέον των συμβόλων θέλουμε να στείλουμε και 45 κενά μεταξύ των συμβόλων, με τουλάχιστον 3 κενά μεταξύ διαφορετικών συμβόλων. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να μεταδώσουμε το μήνυμα;

Θέλουμε να στείλουμε ένα μήνυμα με 12 διαφορετικά σύμβολα πάνω από ένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι. Επιπλέον των συμβόλων θέλουμε να στείλουμε και 45 κενά μεταξύ των συμβόλων, με τουλάχιστον 3 κενά μεταξύ διαφορετικών συμβόλων. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να μεταδώσουμε το μήνυμα;

- Διαφορετικοί τρόποι για να μεταδώσω μόνο τα 12 διαφορετικά σύμβολα: 12!

  Για καθέναν από αυτούς τους τρόπους, σχηματίζονται 11 θέσεις μεταξύ των 12 συμβόλων, σε κάθε μία από τις οποίες πρέπει να βάλουμε τουλάχιστον 3 κενά:
  άρα χρησιμοποιούμε άλλους 33 από τους 45 κενούς χαρακτήρες. Μένουν 12 κενά.

12 κενά, που μένουν $\Leftrightarrow$ 12 ίδια αντικείμενα, που θέλουμε να τοποθετήσουμε σε 11 διαφορετικά κουτιά $\Leftrightarrow$ τις θέσεις, που είπαμε πριν. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{11+12-1}{12} = \binom{22}{12}$ διαφορετικούς τρόπους.

Επομένως, μπορούμε να μεταδώσουμε το μήνυμα με

$$12! \cdot \binom{22}{12} = 3.097 \times 10^{14}$$ διαφορετικούς τρόπους.

Πόσες μη αρνητικές ακέραιες λύσεις έχει η εξίσωση $x_1 + x_2 + ... + x_6 = 10$;

Πόσες μη αρνητικές ακέραιες λύσεις έχει η εξίσωση $x_1 + x_2 + ... + x_6 = 10$;

- Το πρόβλημα είναι ίδιο με την εύρεση των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης 10 ίδιων αντικειμένων (των μονάδων) σε 6 διαφορετικά κουτιά (τους όρους της εξίσωσης). Επομένως, υπάρχουν $\frac{(6+10-1)!}{10!(6-1)!} = 3003$ τρόποι, δηλ., διαφορετικές λύσεις.

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\binom{p+1}{q}$ τρόποι να τοποθετηθούν p πρόσημα "+"και q πρόσημα "-"σε μία γραμμή, έτσι ώστε να μην υπάρχουν δύο πρόσημα "-"το ένα δίπλα στο άλλο.

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\binom{p+1}{q}$ τρόποι να τοποθετηθούν p πρόσημα "+" και q πρόσημα "-" σε μία γραμμή, έτσι ώστε να μην υπάρχουν δύο πρόσημα "-" το ένα δίπλα στο άλλο.

- Ξεκινούμε τοποθετώντας πρώτα στη δοσμένη γραμμή τα "-" κατά τρόπο αυθαίρετο, με μόνον περιορισμό ότι δεν πρέπει να κατέχουν γειτονικές θέσεις. Κατά την τοποθέτηση των "+", ο περιορισμός αυτός επιβάλλει την τοποθέτηση ενός τουλάχιστον "+" μεταξύ οποιονδήποτε δύο "-", που έχουν ήδη τοποθετηθεί. Έτσι, τα πρώτα $q-1$ "+", που τοποθετούμε, τοποθετούνται σε προκαθορισμένες θέσεις (καθένα τους μεταξύ δύο "-").

Περισσεύουν τώρα $p-q+1$ "+"τα οποία πρέπει να τοποθετηθούν στη γραμμή με όλους τους δυνατούς τρόπους. Η τοποθέτησή τους αντιστοιχεί στην τοποθέτηση $p-q+1$ όμοιων σφαιρών (των "+", που περισσεύουν) σε $q+1$ διακεκριμένες υποδοχές (των θέσεων μεταξύ δύο διαδοχικών "-"στη γραμμή και των ακριανών θέσεων της γραμμής). Ο αριθμός των τρόπων για να γίνει αυτή η τοποθέτηση είναι:

$$\frac{((p-q+1)+(q+1)-1)!}{(p-q+1)!((q+1)-1)!} = \binom{p+1}{q}$$

Ποιος ο αριθμός των διαφορετικών μονοπατιών, που μπορεί να ακολουθήσει ένας πύργος για να κινηθεί από το νοτιοδυτικότερο στο βορειοανατολικότερο σημείο μίας σκακιέρας, όταν επιτρέπουμε να κινείται μόνο προς την ανατολή και προς το βορρά; Πόσα απ΄ αυτά τα μονοπάτια αποτελούνται από τέσσερις προς την ανατολή και τρεις προς το βορρά κινήσεις;

Ποιος ο αριθμός των διαφορετικών μονοπατιών, που μπορεί να ακολουθήσει ένας πύργος για να κινηθεί από το νοτιοδυτικότερο στο βορειοανατολικότερο σημείο μίας σκακιέρας, όταν επιτρέπουμε να κινείται μόνο προς την ανατολή και προς το βορρά; Πόσα απ΄ αυτά τα μονοπάτια αποτελούνται από τέσσερις προς την ανατολή και τρεις προς το βορρά κινήσεις;

Ας συμβολίσουμε με 0 μία κίνηση του πύργου προς την ανατολή και με 1 μία κίνηση του πύργου προς το βορρά. Τότε, ο αριθμός των ζητούμενων μονοπατιών είναι ίσος με τον αριθμό των τρόπων τοποθέτησης επτά μηδενικών και επτά μονάδων σε σειρά (εφόσον, ο πύργος θα κινηθεί αναγκαστικά επτά τετράγωνα προς την ανατολή και επτά τετράγωνα προς το βορρά για να φτάσει από το σημείο εκκίνησης στο σημείο τερματισμού). Ο αριθμός αυτός είναι ίσος με:
$\frac{14!}{7!7!} = 3432.$

Για το δεύτερο ερώτημα της άσκησης σκεφτόμαστε ως εξής: Ο αριθμός των τρόπων να σχηματίσουμε ένα μονοπάτι με τέσσερις κινήσεις προς την ανατολή είναι ο ίδιος με τον αριθμό των τρόπων τοποθέτησης επτά όμοιων σφαιρών σε τέσσερα διακεκριμένα κουτιά, έτσι ώστε κανένα κουτί να μην μείνει άδειο. Τοποθετώντας λοιπόν κατ΄ αρχάς από μία σφαίρα σε κάθε κουτί κατά έναν τρόπο, μοιράζουμε τις υπόλοιπες τρεις σφαίρες στα τέσσερα κουτιά κατά $\binom{4+3-1}{3} = 20$ τρόπους. Όμοια, ο αριθμός των τρόπων να σχηματίσουμε ένα μονοπάτι με τρεις κινήσεις προς το βορρά είναι $\binom{3+4-1}{4} = 15$.

Άρα, ο συνολικός αριθμός των μονοπατιών, που αποτελούνται από τέσσερις προς την ανατολή και τρεις προς το βορρά κινήσεις, είναι, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, $20 \cdot 15 = 300$.

Να βρείτε τον αριθμό των λέξεων μήκους n που σχηματίζονται από το αλφάβητο $\{ 0, 1 \}$, οι οποίες έχουν ΑΚΡΙΒΩΣ m τμήματα της μορφής 01.

Να βρείτε τον αριθμό των λέξεων μήκους n που σχηματίζονται από το αλφάβητο $\{ 0, 1 \}$, οι οποίες έχουν ΑΚΡΙΒΩΣ m τμήματα της μορφής 01.

- Υπάρχουν $(n-1)$ θέσεις μεταξύ των ψηφίων σε μία τέτοια λέξη. Καλούμε θέση - διακόπτη μία θέση στην οποία τα ψηφία αλλάζουν είτε από 0 σε 1 ή από 1 σε 0.

Για μία λέξη της επιθυμητής μορφής υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

1. Η λέξη να αρχίζει και να τελειώνει με 1.
   Σε αυτήν τη λέξη πρέπει να υπάρχουν $2m$ θέσεις - διακόπτες (με κάθε δεύτερη θέση - διακόπτη να δίνει ένα 01) και επομένως, υπάρχουν $\binom{n-1}{2m}$ τέτοιες λέξεις.
2. Η λέξη να αρχίζει από 1 και να τελειώνει σε 0.
   Θα υπάρχουν $2m+1$ θέσεις - διακόπτες και επομένως, $\binom{n-1}{2m+1}$ τέτοιες λέξεις.
3. Η λέξη να αρχίζει από 0 και να τελειώνει σε 1.
   Θα υπάρχουν $2m-1$ θέσεις - διακόπτες και επομένως, $\binom{n-1}{2m-1}$ τέτοιες λέξεις.
4. Η λέξη να αρχίζει από 0 και να τελειώνει σε 0.
   Θα υπάρχουν $2m$ θέσεις - διακόπτες και επομένως, $\binom{n-1}{2m}$ τέτοιες λέξεις.

Άρα, έχουμε
$\binom{n-1}{2m} + \binom{n-1}{2m+1} + \binom{n-1}{2m-1} + \binom{n-1}{2m} = \binom{n}{2m+1} + \binom{n}{2m} = \binom{n+1}{2m+1}$
τέτοιες λέξεις.