Διακριτά Μαθηματικά

Φροντιστήριο

Στοιχειώδης Συνδυαστική IV

Επανάληψη

- Κανόνας Αθροίσματος
- Κανόνας Γινομένου
- Χωρίς επαναλήψεις στοιχείων:
  - $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
  - $C(n, r) = \binom{n}{r}$
- Με επαναλήψεις στοιχείων:
  - $P(n, r) = n^r$
  - $C(n, r) = \binom{n+r-1}{r}$
- Ομάδες μη διακεκριμένων στοιχείων: $\frac{n!}{q_1! q_2! \ldots q_t!}$

Επανάληψη

Διανομή αντικειμένων σε υποδοχές:

- n διακεκριμένες υποδοχές
- r Διαφορετικά αντικείμενα:
  - Δε μετράει η σειρά: $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{r} = n^r$
  - Μετράει η σειρά: $\dfrac{(n+r-1)!}{(n-1)!}$
- r Ίδια αντικείμενα: $\dfrac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \dbinom{n+r-1}{r}$

Επανάληψη

- Ανάπτυγμα διωνύμου του Νεύτωνα: $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)x^r$
- Γενικά: $(s+t)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)s^r t^{n-r}$

Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n, ισχύει:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i = 3^n$$

Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n, ισχύει: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i = 3^n$

- Για κάθε x, ισχύει: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$

  Για $x = 2$, η παραπάνω σχέση δίνει:
  $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i = (1+2)^n = 3^n$.

Ποιος είναι ο συντελεστής του x^{40} στην παράσταση $(1 + x^4 + x^5)^{100}$; (Παρατηρήστε ότι στην εξίσωση $4i + 5j = 40$, οι ακέραιες λύσεις είναι οι $(i, j) \in \{(0, 8), (5, 4), (10, 0)\}$).

Ποιος είναι ο συντελεστής του x^{40} στην παράσταση $(1+x^4+x^5)^{100}$; (Παρατηρήστε ότι στην εξίσωση $4i+5j=40$, οι ακέραιες λύσεις είναι οι $(i,j)\in\{(0,8),(5,4),(10,0)\}$).

- Ισχύει $(s+t)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)s^r t^{n-r}$

  Για $s=x^5$ και $t=1+x^4$, έχουμε:

  $$(1+x^4+x^5)^{100} = \sum_{r=0}^{100}\binom{100}{r}x^{5\cdot r}(1+x^4)^{100-r}$$

  και $(1+x^4)^{100-j} = \sum_{k=0}^{100-r}\binom{100-r}{k}x^{4\cdot k} \Rightarrow$

- $(1+x^4+x^5)^{100} = \sum_{r=0}^{100} \binom{100}{r} x^{5\cdot r} \sum_{k=0}^{100-r} \binom{100-r}{k} x^{4\cdot k}$

  Για να υπολογίσουμε το συντελεστή του x^{40}, πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλα ζεύγη τιμών για k και r, τέτοια ώστε: $4k+5r=40$, με k και r θετικούς ακέραιους μικρότερους του 100. Αυτά δίνονται από την εκφώνηση: $\{(0,8),(5,4),(10,0)\}$

  Οπότε, ο συντελεστής του x^{40} είναι:
  $\binom{100}{8}\binom{92}{0}+\binom{100}{4}\binom{96}{5}+\binom{100}{0}\binom{100}{10}$.

Να υπολογιστεί ο συντελεστής του x^{23} στο $(1 + x^5 + x^9)^{100}$.

Να υπολογιστεί ο συντελεστής του x^{23} στο $(1+x^5+x^9)^{100}$.

- Είναι,

$$(1+x^5+x^9)^{100} = \sum_{i=1}^{100} \binom{100}{i} (1+x^5)^i x^{9(100-i)}$$

Για να πάρουμε το x^{23} πρέπει να έχουμε $x^{23} = x^9 x^9 x^5$, δηλαδή το x^{23} θα δίνεται από το άθροισμα στο δεξιό μέλος της παραπάνω σχέσης για $100 - i = 2 \Rightarrow i = 98$.

Ψάχνουμε, άρα, το συντελεστή του x^{23} στο:
$\binom{100}{98}(1+x^5)^{98}(x^9)^2$.
Αυτός είναι ο $\binom{100}{98} \cdot 98$, όπου το 98 είναι οι τρόποι επιλογής του x^5 από το $(1+x^5)^{98}$.

Έτσι, $\binom{100}{98} \cdot 98 = \frac{99 \cdot 100}{2} \cdot 98 = 485100$.

Να υπολογιστεί το άθροισμα $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

- Έχουμε από το διωνυμικό ανάπτυγμα ότι: $(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$, οπότε θέτοντας διαδοχικά $x = 1, 2, \ldots, n$ και αθροίζοντας έχουμε :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2^3 = 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 + 1^3 \\ 3^3 = 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 2^3 \\ 4^3 = 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 3^3 \\ \vdots \\ (n+1)^3 = 1 + 3 \cdot n + 3 \cdot n^2 + n^3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = n + 3(1+2+\ldots+n) + 3(1^2+2^2+\ldots+n^2) + 1 \Rightarrow$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{n+1}{3} - (1+2+\ldots+n) \Rightarrow$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{2(n+1)^3 - 2(n+1) - 3n(n+1)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+2+4n-2-3n)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+n)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Άρα, τελικά $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Να δείξετε ότι:
$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Να δείξετε ότι: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

- Έχουμε: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$

$$= (1+x)(1+x)^{n-1} = (1+x)^{n-1} + x(1+x)^{n-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k + x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] x^k$$

Συνεπώς, από ιδιότητες σειρών ισχύει: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Να δείξετε ότι:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

Να δείξετε ότι: $\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$

- Έχουμε:

$$(1+x)^{r+s} = \sum_{k=0}^{r+s} \binom{r+s}{k} x^k \tag{1}$$

και $(1+x)^{r+s} = (1+x)^r(1+x)^s = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} x^i \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} x^j$

- Από ιδιότητες σειρών έχουμε:

$$= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} x^i \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} x^j = \sum_{k=0}^{r+s} \left(\sum_{\rho=0}^{k} \binom{r}{\rho} \binom{s}{k-\rho} \right) x^k \quad (2)$$

Άρα, εξισώνοντας τις (1), (2) ισχύει:

$$\binom{r+s}{n} = \sum_{\rho=0}^{n} \binom{r}{\rho} \binom{s}{n-\rho}$$

Να δείξετε ότι:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

Να δείξετε ότι: $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$

- Έχουμε:

$$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k \tag{1}$$

Επίσης: $(1+x)^n(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j =$

Από ιδιότητες σειρών έχουμε:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j = \sum_{r=0}^{2n} \left(\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \binom{n}{r-k} \right) x^r \tag{2}$$

- Άρα, από ιδιότητες των διωνυμικών συντελεστών και εξισώνοντας τους συντελεστές του x^n, από την (1) και (2) έχουμε:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2$$