Διακριτά Μαθηματικά

Σύνοψη Θεωρίας

Τυπολόγιο

Κανόνες γινομένου και αθροίσματος

- **Κανόνας αθροίσματος**: Αν ένα γεγονός μπορεί να συμβεί κατά m τρόπους και ένα άλλο γεγονός μπορεί να συμβεί κατά n τρόπους, τότε υπάρχουν $m + n$ τρόποι, κατά τους οποίους ένα από τα δυο γεγονότα μπορεί να συμβεί.
- **Κανόνας γινομένου**: Αν ένα γεγονός μπορεί να συμβεί κατά m τρόπους και ένα άλλο γεγονός μπορεί να συμβεί κατά n τρόπους, τότε υπάρχουν $m \times n$ τρόποι, κατά τους οποίους και τα δυο γεγονότα μπορεί να συμβούν.

Συνδυασμοί και Διατάξεις με Επανάληψη

- Χωρίς επαναλήψεις στοιχείων:
    - $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
    - $C(n,r) = \binom{n}{r}$
- Με επαναλήψεις στοιχείων:
    - $P(n,r) = n^r$
    - $C(n,r) = \binom{n+r-1}{r}$
- Ομάδες μη διακεκριμένων στοιχείων: $\frac{n!}{q_1!q_2!\ldots q_t!}$

Διανομή Αντικειμένων σε Υποδοχές

Διανομή αντικειμένων σε υποδοχές:

- n διακεκριμένες υποδοχές
- r Διαφορετικά αντικείμενα:
  - Δε μετράει η σειρά: $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{r} = n^r$
  - Μετράει η σειρά: $\dfrac{(n+r-1)!}{(n-1)!}$
- r Ίδια αντικείμενα: $\dfrac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \dbinom{n+r-1}{r}$

Διωνυμικοί Συντελεστές

- Ανάπτυγμα διωνύμου του Νεύτωνα: $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)x^r$
- Γενικά: $(s+t)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)s^r t^{n-r}$

Τύποι Γεωμετρικής Προόδου

- Από γεωμετρικές προόδους ισχύει:

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + ... + \lambda^n = \frac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda}$$

- ενώ, για άπειρους όρους:

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + ... = \frac{1}{1 - \lambda}, \text{ ισχύει μόνον όταν } \lambda < 1$$

.

- Η εκθετική συνάρτηση e^x μπορεί να γραφεί και ως άπειρη σειρά ως:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

Χρήσιμες σχέσεις για τον υπολογισμό Γεννητριών Συναρτήσεων (1/3)

1. $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$
2. $(1 + z)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k$
3. $(1 + z)^{-n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{-n}{k} z^k$, όπου $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ και $\dbinom{-n}{k} = (-1)^k \dbinom{k+n-1}{k}$

Χρήσιμες σχέσεις για τον υπολογισμό Γεννητριών Συναρτήσεων (2/3)

Αν στις παραπάνω σχέσεις στη θέση του z χρησιμοποιηθεί το $-z$ ισχύει:

1. $$(1-z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-z)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k z^k$$
2. $$(1-z)^{-n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{-n}{k} (-z)^k =$$
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{k+n-1}{k} (-1)^k z^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+n-1}{k} z^k$$

Χρήσιμες σχέσεις για τον υπολογισμό Γεννητριών Συναρτήσεων (3/3)

1. $$1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} = e^x$$
2. $$e^{\alpha x} = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha^r \frac{x^r}{r!}$$
3. $$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
4. $$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις

Για ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ και όχι για ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΥΣ χρησιμοποιείται Εκθετική Γεννήτρια Συνάρτηση.

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = e^x$$

Όταν υπολογίζεται η τελική εκθετική γεννήτρια συνάρτηση, η απάντηση στο ερώτημα (**με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε** n **αντικείμενα όταν**...) θα βρίσκεται στο συντελεστή του $\frac{z^n}{n!}$.

Ιδιότητες γεννητριών συναρτήσεων

Θεωρούμε ακολουθίες $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ και $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n, ...$ με γεννήτριες συναρτήσεις $A(x)$ και $B(x)$ αντίστοιχα.

Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. Γραμμική ιδιότητα
2. Ιδιότητα κλίμακας
3. Ιδιότητα ολίσθησης
4. Ιδιότητα μερικών αθροισμάτων
5. Ιδιότητα συμπληρωματικών μερικών αθροισμάτων
6. Ιδιότητα παραγώγου
7. Ιδιότητα ολοκλήρωσης
8. Ιδιότητα συνέλιξης

Γραμμική ιδιότητα

Η ακολουθία $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ έχει γεννήτρια συνάρτηση την $A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^r$.

Η ακολουθία $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n, ...$ έχει γεννήτρια συνάρτηση τη $B(x) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r$.

Έστω c, d σταθερές.

Η ΓΣ της ακολουθίας $c \cdot \alpha + d \cdot \beta$ είναι η $c \cdot A(x) + d \cdot B(x)$.

Ιδιότητα κλίμακας

Η ακολουθία $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ έχει γεννήτρια συνάρτηση την $A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^r$.

Η ΓΣ της ακολουθίας $b_r = \lambda^r \alpha_r$ είναι η $A(\lambda x)$.

Ιδιότητα ολίσθησης

Η ακολουθία $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ έχει γεννήτρια συνάρτηση την $A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^r$.

Η ΓΣ της ακολουθίας:
$b_r = 0$ για $r = 0, ..., n-1$ και
$b_r = \alpha_{r-n}$ για $r = n, n+1, ...$
είναι η $B(x) = x^n A(x)$.

Ιδιότητα μερικών αθροισμάτων

Η ακολουθία $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ έχει γεννήτρια συνάρτηση την $A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^r$.

Η ΓΣ της ακολουθίας $b_k = \sum_{r=0}^{k} \alpha_r, k = 0, 1, 2, ...$ είναι $B(x) = \dfrac{A(x)}{1-x}$.

Ιδιότητα παραγώγου

Η ακολουθία $\gamma_n = n\alpha_n$ έχει ΓΣ τη $\Gamma(x) = xA'(x)$, όπου $A'(x)$ είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $A(x)$.

Ιδιότητα ολοκληρώματος

- Η ακολουθία $\delta_n = \frac{\alpha_n}{n+1}$ έχει ΓΣ τη $\Delta(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(z)dz$.
- Η παράγουσα του z^n είναι $\frac{z^{n+1}}{n+1}$, οπότε έχουμε:

$$\Delta(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(z)dz = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \alpha_n z^n dz =$$

$$\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n+1}x^n$$

Ιδιότητα συνέλιξης

- Έστω ακολουθία α με όρους: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots$
- Έστω ακολουθία β με όρους: $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$
- Η συνέλιξή τους είναι η ακολουθία με όρους:
- $\gamma_0 = \alpha_0 \cdot b_0$
- $\gamma_1 = \alpha_0 \cdot b_1 + \alpha_1 \cdot b_0$
- $\gamma_2 = \alpha_0 \cdot b_2 + \alpha_1 \cdot b_1 + \alpha_2 \cdot b_0$
- $\gamma_3 = \alpha_0 \cdot b_3 + \alpha_1 \cdot b_2 + \alpha_2 \cdot b_1 + \alpha_3 \cdot b_0$
- $\ldots$

ΔΗΛΑΔΗ: Συνέλιξη των ακολουθιών α και β είναι η ακολουθία $d_k = \sum_{r=0}^{k} \alpha_r \beta_{k-r}, k = 0, 1, 2, \ldots$ και συμβολίζεται $\alpha * \beta$.
Η ΓΣ της ακολουθίας d_k είναι η $D(x) = A(x)B(x)$, όπου $A(x)$ είναι η ΓΣ της ακολουθίας α_r και $B(x)$ είναι η ΓΣ της ακολουθίας b_r.

Fibonacci

Μορφή Σχέσης Αναδρομής:

$$\alpha_{n+2} = O_{n+2} + N_{n+2} = (O_{n+1} + N_{n+1}) + (O_n + N_n) = \alpha_{n+1} + \alpha_n$$

Για τους αριθμούς Fibonacci, συνήθως, είναι $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$, ή $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$.

Γραμμικές Σχέσεις Αναδρομής με σταθερούς συντελεστές

Μια σχέση αναδρομής, που έχει την εξής μορφή:

$$c_0\alpha_n + c_1\alpha_{n-1} + c_2\alpha_{n-2} + \ldots + c_r\alpha_{n-r} = f(n) \qquad (1)$$

με $c_0, c_1, \ldots, c_r$ σταθερούς αριθμούς ονομάζεται γραμμική σχέση αναδρομής με σταθερούς συντελεστές, r-τάξης ή r-βαθμού. Αν η $f(n) = 0$, τότε η σχέση αναδρομής λέγεται ομογενής. Αν $f(n) \neq 0$ λέγεται μη ομογενής.

Μέθοδος χαρακτηριστικής εξίσωσης

Η λύση της γενικής ομογενούς είναι: $\alpha_n^{(h)}$ και μερική λύση της μη ομογενούς $\alpha_n^{(p)}$.

$$c_0\alpha_n^{(h)} + c_1\alpha_{n-1}^{(h)} + \ldots + c_r\alpha_{n-r}^{(h)} = 0$$
$$c_0\alpha_n^{(p)} + c_1\alpha_{n-1}^{(p)} + \ldots + c_r\alpha_{n-r}^{(p)} = f(n)$$

Επομένως:

$$c_0\left(\alpha_n^{(h)} + \alpha_n^{(p)}\right) + c_1\left(\alpha_{n-1}^{(h)} + \alpha_{n-1}^{(p)}\right) + \ldots + c_r\left(\alpha_{n-r}^{(h)} + \alpha_{n-r}^{(p)}\right) = f(n) \tag{2}$$

Η πλήρης λύση, $\alpha_n = \alpha_n^{(h)} + \alpha_n^{(p)}$, ικανοποιεί τη σχέση αναδρομής.

Εύρεση ομογενούς λύσης

Αν υπάρχει μία λύση $\alpha_n^{(h)} = Ax^n$, όπου x ονομάζεται χαρακτηριστική ρίζα και A είναι μια σταθερά, που θα υπολογιστεί από τις αρχικές συνθήκες. Αντικαθιστώντας, η χαρακτηριστική εξίσωση της σχέσης αναδρομής είναι:

$$c_0Ax^n + c_1Ax^{n-1} + c_2Ax^{n-2} + \ldots + c_rAx^{n-r} = 0 \Leftrightarrow$$
$$c_0x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \ldots + c_rx^{n-r} = 0 \tag{3}$$

Τότε, αποδεικνύεται ότι η γενική λύση της ομογενούς είναι:

$$\alpha_n^{(h)} = A_1x_1^n + A_2x_2^n + \ldots + A_rx_r^n$$

Τα $A_1, A_2, \ldots, A_r$ θα υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Εύρεση ομογενούς λύσης για την ακολουθία Fibonacci

Η σχέση αναδρομής για τους αριθμούς Fibonacci είναι:

$$\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} + \alpha_n$$

ή

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$$

Εύρεση της μερικής λύσης

Μορφή $f(n)$	Μορφή μερικής λύσης
k, σταθερά	C, σταθερά
πολυώνυμο	πολυώνυμο ίδιου βαθμού αλλά πλήρες
$k\lambda^n$, $\quad k,\lambda$ σταθερές	$c\beta^n$, $\quad c,\beta$ σταθερές

Οι σταθερές της μερικής λύσης υπολογίζονται αντικαθιστώντας την υποψήφια λύση στη μη ομογενή σχέση αναδρομής.

Μέθοδος των γεννητριών συναρτήσεων

Αν είναι $A(x)$ η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$$

δηλαδή:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$$

Έστω ότι ισχύει η εξής σχέση αναδρομής:

$$c_0\alpha_n + c_1\alpha_{n-1} + \ldots + c_r\alpha_{n-r} = f(n) \tag{4}$$

με $k \geq r$.

Λύση της τηλεσκοπικής σχέσης αναδρομής

Η γενική μορφή της τηλεσκοπικής σχέσης αναδρομής είναι η εξής:

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= \alpha T(n/b) + d(n) \end{aligned} \tag{5}$$

Με n ακέραια δύναμη του b.

Σύνολο, υποσύνολο, γνήσιο υποσύνολο

- Σύνολο: συλλογή διαφορετικών αντικειμένων, που καλούνται στοιχεία του συνόλου.
    - Δε μετράει η σειρά των στοιχείων
    - Δεν έχουν νόημα οι επαναλήψεις ίδιων στοιχείων
    - $\{\} = \emptyset$: σύνολο χωρίς στοιχεία
- $T \subseteq S$: Το T είναι υποσύνολο του S δηλ., κάθε στοιχείο του T είναι και στοιχείο του S.
  Κάθε σύνολο είναι υποσύνολο του εαυτού του.
- $T \subset S$: Το T είναι γνήσιο υποσύνολο του S δηλ., το T είναι υποσύνολο του S και υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο στο S, που δεν είναι στοιχείο του T.
- $\alpha \in S$: το α είναι στοιχείο του συνόλου S
- $|S|$: πλήθος στοιχείων του συνόλου S
- Το S είναι ένα $k-$σύνολο αν περιέχει k στοιχεία.

Ένωση, Τομή, Διαφορά, Διαμέριση

Έστω δύο σύνολα A και B.

- $A \cup B$: Ένωση των συνόλων A και B, περιέχει όλα τα στοιχεία των συνόλων A και B.
  $-\{a, b, c, d\} \cup \{a, d, e, j\} = \{a, b, c, d, e, j\}$
- $A \cap B$: Τομή των συνόλων A και B, περιέχει τα κοινά στοιχεία των συνόλων A και B.
  $-\{a, b, c, d\} \cap \{a, d, e, j\} = \{a, d\}$
- $A - B$: Διαφορά των συνόλων A και B, περιέχει τα στοιχεία του συνόλου A, που δεν ανήκουν στο B.
  $-\{a, b, c, d\} - \{a, d, e, j\} = \{b, c\}$
- Διαμέριση ενός συνόλου είναι μια συλλογή υποσυνόλων του τέτοια ώστε, κάθε στοιχείο του συνόλου να ανήκει σε ακριβώς ένα υποσύνολο.

Διατεταγμένο ζεύγος, Καρτεσιανό γινόμενο

- Διατεταγμένο ζεύγος (a, b) είναι μια διάταξη δύο - όχι απαραίτητα διαφορετικών - στοιχείων a και b.
  Τα (a, b) και (b, a) είναι δύο διαφορετικά διατεταγμένα ζεύγη.
- Καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων S και T - $S \times T$ - είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (x, y) στα οποία $x \in S$ και $y \in T$, π.χ.:
  $\{a, b, c\} \times \{1, 2\} = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$.

Δυαδική σχέση

- Μια Δυαδική σχέση μεταξύ των συνόλων S και T είναι ένα υποσύνολο διατεταγμένων ζευγών από το καρτεσιανό γινόμενο $S \times T$, π.χ.:
  $\{(a,1),(a,2),(c,2)\}$ είναι μια δυαδική σχέση μεταξύ των συνόλων $\{a,b,c\}$ και $\{1,2\}$.
- Μια Δυαδική σχέση μεταξύ δύο συνόλων αναπαρίσταται με έναν πίνακα.
- Μια Δυαδική σχέση σε ένα σύνολο S είναι μια δυαδική σχέση μεταξύ του S και του εαυτού του, π.χ.:
  $\{(a,a),(a,c),(b,a),(b,c),(c,b)\}$ είναι μια δυαδική σχέση στο σύνολο $\{a,b,c\}$.

Σχέση ισοδυναμίας

- Μια Δυαδική σχέση σε ένα σύνολο S καλείται ‘‘Σχέση ισοδυναμίας ’’ αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:
  1. Κάθε στοιχείο στο σύνολο σχετίζεται με τον εαυτό του. (ανακλαστική ιδιότητα)
  2. Για οποιαδήποτε στοιχεία a, b του συνόλου, αν το a σχετίζεται με το b τότε και το b σχετίζεται με το a. (συμμετρική ιδιότητα)
  3. Για οποιαδήποτε στοιχεία a, b, c του συνόλου, αν το a σχετίζεται με το b και b σχετίζεται με το c το τότε και το a σχετίζεται με το c. (μεταβατική ιδιότητα)
- Η δυαδική σχέση αριστερά είναι σχέση ισοδυναμίας, ενώ αυτή στα δεξιά δεν είναι.

Κλάσεις ισοδυναμίας και διαμερίσεις

- Αν υπάρχει μία σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο S, τότε χωρίζονται τα στοιχεία του S σε κλάσεις, που καλούνται κλάσεις ισοδυναμίας, έτσι ώστε δύο στοιχεία να ανήκουν στην ίδια κλάση, μόνο αν σχετίζονται μεταξύ τους.
  - Κάθε στοιχείο ανήκει σε κάποια κλάση ισοδυναμίας, αφού μπορεί να είναι σε τουλάχιστον μία κλάση από μόνο του. (λόγω της ανακλαστικής ιδιότητας)
  - Δεν υπάρχει ασάφεια σχετικά με το αν κάποιο στοιχείο ανήκει σε κάποια κλάση ισοδυναμίας. (λόγω της συμμετρικής ιδιότητας)
  - Κάθε στοιχείο δε μπορεί να ανήκει σε παραπάνω από μία κλάσεις ισοδυναμίας. (λόγω της μεταβατικής ιδιότητας)

Κλάσεις ισοδυναμίας και διαμερίσεις

- Μια σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο ορίζει μια διαμέριση του συνόλου, στην οποία τα ξένα μεταξύ τους υποσύνολα είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας, π.χ.:
  η διαμέριση, που ορίζεται από τη σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\{a, b, c, d, e\}$ είναι η $\{\{a, b\}, \{c, d, e\}\}$.
- Δύο στοιχεία είναι ισοδύναμα, αν ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας.

Μεταθέσεις

- Μετάθεση. Σύνολο μεταθέσεων G.
- Η μετάθεση, που αντιστοιχεί κάθε στοιχείο στον εαυτό του, αφήνει, δηλ. τα στοιχεία ως έχουν, λέγεται ταυτοτική.
- Δυαδική σχέση επαγόμενη από σύνολο μεταθέσεων G είναι σχέση ισοδυναμίας.

Μεταθέσεις

- Δίνεται σύνολο $S = \{a, b, \ldots\}$ και ένα σύνολο μεταθέσεων G για τα στοιχεία του S:
- Μια Δυαδική σχέση στο S είναι δυαδική σχέση επαγόμενη από το G, όταν ένα στοιχείο a σχετίζεται με ένα στοιχείο b, αν και μόνον αν, υπάρχει μετάθεση στο G, που απεικονίζει το a στο b.
- Έστω $G = \{\begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ bacd \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ abdc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ badc \end{pmatrix}\}$.
- Η Δυαδική σχέση σε ένα σύνολο, που επάγεται από σύνολο μεταθέσεων G είναι σχέση ισοδυναμίας.

Θεώρημα Burnside (1/2)

- Ζητούμενο: μέτρηση διαφορετικών μορφών ενός συνόλου (αντικειμένου) όταν αναδιατάσσονται τα στοιχεία (μέρη) του.
- Παρατήρηση: πλήθος κλάσεων ισοδυναμίας = πλήθος διαφορετικών μεταθέσεων
- Διατύπωση: Το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας, στις οποίες διαμερίζεται ένα σύνολο S, από τη σχέση ισοδυναμίας, που επάγεται από ένα σύνολο μεταθέσεων G του S, είναι: $\frac{1}{|G|}\sum_{\pi \in G} \psi(\pi)$.

Θεώρημα Burnside (2/2)

- Εφαρμογή: Δίνεται ένα σύνολο S.
  1. Βρίσκεται (εκτός αν δίνεται) το σύνολο μεταθέσεων G.
  2. Σε κάθε μετάθεση στο G βρίσκεται το πλήθος των στοιχείων, που δεν αλλάζουν.
  3. Αθροίζονται για όλες τις μεταθέσεις και διαιρούνται με το άθροισμα του πλήθους των μεταθέσεων $|G|$.

Κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων

- Έστω D και R σύνολα και G σύνολο μεταθέσεων των στοιχείων του D.
- Ορίζεται η εξής διμελής σχέση στο σύνολο των συναρτήσεων από το D στο R: f_1, f_2 σχετίζονται αν $f_1(d) = f_2(\pi(d)), \forall d \in D$, που είναι σχέση ισοδυναμίας.
- Επομένως, οι συναρτήσεις από $D \to R$ χωρίζονται σε κλάσεις ισοδυναμίας, που καλούνται πρότυπα (patterns): αντιστοιχούν σε διαφορετικούς τρόπους να μοιράσω $|D|$ αντικείμενα σε $|R|$ κουτιά, όταν η ισοδυναμία μεταξύ των μοιρασμάτων καθορίζεται από το G.

Ανάθεση βαρών στα στοιχεία του R (1/4)

- Ανατίθενται ‘‘βάρη’’ (που μπορεί να είναι αριθμοί ή σύμβολα) στα στοιχεία του R.
- $r_1 + r_2 + r_3$ σημαίνει ότι κάποιο στοιχείο του D μπορεί να πάρει ‘‘βάρος ’’ r_1 ή r_2 ή r_3.
- Αν υπάρχουν 2 στοιχεία με ‘‘βάρος ’’ u και 1 στοιχείο με ‘‘βάρος ’’ v στο R σημαίνει ότι κάποιο στοιχείο του D, μπορεί να διαλέξει στοιχεία τύπου u ή τύπου v.
- Χοντρικά, με αυτόν τον τρόπο γενικεύεται η έννοια των γεννητριών συναρτήσεων.

Ανάθεση βαρών στα στοιχεία του R (2/4)

- Το βάρος μιας συνάρτησης $f : D \to R$ είναι το γινόμενο των βαρών των εικόνων των στοιχείων του D στο R: $\prod_{d \in D} w(f(d))$.
- Το βάρος ενός συνόλου συναρτήσεων από $D \to R$ είναι το άθροισμα των βαρών τους.
- Άρα: το βάρος μιας συνάρτησης δείχνει πώς (τον τρόπο) $|D|$ αντικείμενα ρίχνονται σε $|R|$ κουτιά.
- Το βάρος ενός συνόλου συναρτήσεων δείχνει τους τρόπους (το πλήθος των τρόπων), που κατανέμονται τα αντικείμενα.
- Συναρτήσεις στην ίδια κλάση ισοδυναμίας έχουν το ίδιο βάρος, που καλείται βάρος προτύπου, δηλ. βάρος της κλάσης ισοδυναμίας. (Φυσικά, μπορεί συναρτήσεις με το ίδιο βάρος να μην ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας)

Ανάθεση βαρών στα στοιχεία του R (3/4)

Στόχος: Εύρεση του βάρος όλων των κλάσεων ισοδυναμίας συναρτήσεων από $D \to R$. Μια μετάθεση π.χ.,

$$\pi = \begin{pmatrix} abcdef \\ cedabf \end{pmatrix}.$$

- Τα στοιχεία $a \to c, c \to d, d \to a$ σχηματίζουν κύκλο, οπότε $\{a, c, d\}$ είναι ένας κύκλος στην π με μήκος 3, δηλ. με 3 στοιχεία.
- Άλλος κύκλος: $b \to e, e \to b$, $\{e, b\}$ είναι ένας κύκλος στην π με μήκος 2.
- $x_{\text{βάρος}}^{\text{πλήθος}}$: για την π έχουμε x_3^1, x_2^1
- Με έναν τέτοιο συμβολισμό, πόσοι κύκλοι υπάρχουν σε μια μετάθεση π με μίαν αναπαράσταση δομής κύκλου της π.

Ανάθεση βαρών στα στοιχεία του R (4/4)

- Δεδομένου ενός συνόλου μεταθέσεων G, ορίζεται ο δείκτης κύκλου P_G του G σαν το άθροισμα των κυκλικών αναπαραστάσεων των μεταθέσεων του G διά το πλήθος των μεταθέσεων του G: $P_G = \dfrac{\displaystyle\sum_{\pi \in G} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_k^{b_k}}{|G|}$

Θεώρημα Pólya

- Δεδομένα: σύνολα D, R, συναρτήσεις $f : D \to R$, σύνολο μεταθέσεων G, βάρη στοιχείων του R.
- Ζητούμενο: το συνολικό βάρος των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων f.
- Διατύπωση: Ο κατάλογος των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού D και σύνολο τιμών R είναι:

$$P_G\left(\sum_{r\in R} w(r), \sum_{r\in R}[w(r)]^2, \ldots, \sum_{r\in R}[w(r)]^k, \ldots\right)$$

, δηλαδή ο κατάλογος των προτύπων προκύπτει αντικαθιστώντας το x_1 με $\sum_{r\in R} w(r)$, το x_2 με $\sum_{r\in R}[w(r)]^2$, ..., το x_k με $\sum_{r\in R}[w(r)]^k$,... στην έκφραση του δείκτη κύκλων P_G του συνόλου μεταθέσεων G.

Μεθοδολογία

- Δεδομένα: σύνολα D, R, συναρτήσεις $f : D \to R$, σύνολο μεταθέσεων G, βάρη στοιχείων του R.
- Ζητούμενο: το συνολικό βάρος των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων f.
- Εφαρμογή:
  1. Βρίσκω κύκλους στα $\pi \in G$
  2. Φτιάχνω το P_G
  3. Σε κάθε όρο του P_G αντικαθιστώ το x_1 με $w(r_1) + w(r_2) + \ldots, \forall r_i \in R$ – x_2 με $w^2(r_1) + w^2(r_2) + \ldots, \forall r_i \in R$
     – κοκ

Γενικευμένη μορφή θεωρήματος Pólya (1/2)

- Δεδομένα: σύνολα D, R, συναρτήσεις $f : D \to R$, σύνολο μεταθέσεων G για τα στοιχεία του D, σύνολο μεταθέσεων H για τα στοιχεία του R, βάρη στοιχείων του R.
- Ζητούμενο: το συνολικό βάρος των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων f.
- Διατύπωση: Ο κατάλογος των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού D και σύνολο τιμών R, είναι: $\frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{\pi \in G; \tau \in H} \psi[(\pi, \tau)']$, όπου $\psi[(\pi, \tau)']$ είναι το πλήθος των συναρτήσεων για τις οποίες ισχύει $\tau f(d) = f[\pi(d)]$ για κάθε στοιχείο $d \in D$.

Γενικευμένη μορφή θεωρήματος Pólya (2/2)

- Εφαρμογή: Το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας συναρτήσεων από το D στο R είναι η τιμή της έκφρασης: $P_G((\frac{\partial}{\partial z_1})^{b_1}, (\frac{\partial}{\partial z_2})^{b_2}, (\frac{\partial}{\partial z_3})^{b_3}, \ldots) \times$ $P_H[e^{c_1(z_1+z_2+z_3+\ldots)}, e^{2c_2(z_2+z_4+z_6+\ldots)}, e^{3c_3(z_3+z_6+z_9+\ldots)}, \ldots]$ για $z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = 0$, με b_i κύκλους μεγέθους i στο G και c_i κύκλους μεγέθους i στο H.

Εγκλεισμός - Αποκλεισμός

- Έστω S σύνολο με πληθικό αριθμό N, $|S| = N$.
- $c_1, c_2, c_3, \ldots c_t$: συλλογή από συνθήκες, που ικανοποιούνται από στοιχεία του S.
- Κάποια στοιχεία στοιχεία του S μπορεί να ικανοποιούν παραπάνω από μία συνθήκες και άλλα καμία
  - $N(c_i), 1 \leq i \leq t$: πλήθος στοιχείων του S, που ικανοποιούν τη συνθήκη c_i.
  - $N(\overline{c_i}), 1 \leq i \leq t$: πλήθος στοιχείων του S, που δεν ικανοποιούν τη συνθήκη c_i.
  - $N(c_i) + N(\overline{c_i}) = N = |S|$
  - $N(c_i c_j), i, j \in \{1, 2, \ldots, t\}, i \neq j$: πλήθος στοιχείων του S, που ικανοποιούν και τις δύο συνθήκες c_i, c_j.
  - $N(\overline{c_i}\ \overline{c_j}), i, j \in \{1, 2, \ldots, t\}, i \neq j$: πλήθος στοιχείων του S, που δεν ικανοποιούν καμία από τις δύο συνθήκες c_i, c_j.
  - $N(\overline{c_i}\ \overline{c_j}) = N - N(c_i) - N(c_j) + N(c_i c_j)$

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

- Έστω S σύνολο με πληθικό αριθμό N, $|S| = N$
- $c_1, c_2, c_3, \ldots c_t$: συλλογή από συνθήκες που ικανοποιούνται από μερικά ή από όλα τα στοιχεία του S
- Το πλήθος των στοιχείων του S, που δεν ικανοποιούν καμία από τις συνθήκες είναι: $\overline{N} = N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \ldots \overline{c_t}) =$ $N - N(c_1) - N(c_2) - \ldots - N(c_t) + N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \ldots +$ $N(c_1c_t) + N(c_2c_3) + \ldots N(c_{t-1}c_t)$ $- N(c_1c_2c_3) - N(c_1c_2c_4) - \ldots - N(c_1c_2c_t) - N(c_1c_3c_4) - \ldots -$ $N(c_1c_3c_t) - N(c_{t-2}c_{t-1}c_t) + \ldots + (-1)^t N(c_1c_2c_3\ldots c_t) =$ $N - \sum_{1 \leq i \leq t} N(c_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq t} N(c_ic_j) - \sum_{1 \leq i < j < k \leq t} N(c_ic_jc_k) +$ $\ldots + (-1)^t N(c_1c_2c_3\ldots c_t)$.

Συμπέρασμα της Αρχής Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

Συμπέρασμα: το πλήθος των στοιχείων του S. που ικανοποιούν τουλάχιστον μία από τις συνθήκες είναι $N - \overline{N}$.

Ο γενικός τύπος

- Δίνει το πλήθος των αντικειμένων, που έχουν m από r ιδιότητες, $m = 0, 1, 2, 3, ..., r$.
- s_i: πλήθος αντικειμένων, που πληρούν i από τις r ιδιότητες.
- e_i: πλήθος αντικειμένων, που πληρούν ακριβώς i από τις r ιδιότητες, δηλ., πληρούν i από τις r ιδιότητες και δεν πληρούν τις υπόλοιπες $r - i$.

Γενικός τύπος αρχής Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (1/2)

Αναλυτικά:

- $s_0 = N$
- $s_1 = N(a_1) + N(a_2) + \ldots + N(a_r) = \sum_{i} N(a_i)$
- $s_2 = N(a_1 a_2) + N(a_1 a_3) + \ldots + N(a_{r-1} a_r) = \sum_{i,j: i \neq j} N(a_i a_j)$
- $s_3 = N(a_1 a_2 a_3) + N(a_1 a_2 a_4) + \ldots + N(a_{r-2} a_{r-1} a_r) = \sum_{i,j,k: i \neq j \neq k} N(a_i a_j a_k)$
- $\ldots$
- $s_r = N(a_1 a_2 \ldots a_r)$

Γενικός τύπος αρχής Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (2/2)

Αναλυτικά:

- $e_0 = N(\overline{a_1}\ \overline{a_2}\ ...\overline{a_r}\ )$
- $e_1 = N(a_1\overline{a_2}\ ...\overline{a_r}) + N(\overline{a_1}\ a_2\overline{a_3}\ ...\overline{a_r}) + ... + N(\overline{a_1}\ \overline{a_2}\ ...a_r)$
- $e_2 = N(a_1 a_2\overline{a_3}...\overline{a_r} + N(a_1\overline{a_2}\ a_3...\overline{a_r}))$
- $e_3 = N(a_1 a_2 a_3...\overline{a_r}) + N(a_1 a_2\overline{a_3}a_4...\overline{a_r}) + ... + N(\overline{a_1}\ \overline{a_2}\ \overline{a_3}...a_{r-2}a_{r-1}a_r)$
- ...
- $e_r = N(a_1 a_2...a_r)$

Προφανώς, $e_0 = s_0 - s_1 + s_2 - s_3 + ... + (-1)^r s_r$.
Γενικά:

$$e_m = s_m - \binom{m+1}{1} s_{m+1} + \binom{m+2}{2} s_{m+2} - ... + (-1)^{r-m}\binom{r}{r-m} s_r$$