



- ▶ Στοιχειώδης συνδυαστική
- ▶ Γεννήτριες συναρτήσεις
- ▶ Σχέσεις αναδρομής
- ▶ Θεωρία Μέτρησης Pólya
- ▶ Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού



- ▶ Γεννήτριες συναρτήσεις



Τι είναι η γεννήτρια;

- ▶ Στην ακολουθία των αριθμών:

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$$

αντιστοιχεί η γεννήτρια συνάρτηση:

$$A(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \dots$$

που γράφεται πιο σύντομα:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$$

- ▶ Αν η ακολουθία είναι πεπερασμένη (σταματάει π.χ., στον όρο α_{10}) τότε και η γεννήτρια έχει πεπερασμένο μήκος:

$$\sum_{n=0}^{10} \alpha_n z^n$$



Τι είναι η γεννήτρια;

- ▶ Έστω η ακολουθία $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 5$, ενώ για $n \geq 4$ είναι $\alpha_n = 0$.
- ▶ Η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση είναι η:

$$\sum_{n=0}^3 \alpha_n z^n = 1 + 2z^2 + 5z^3$$



- ▶ Σε ορισμένα πολύπλοκα προβλήματα είναι δύσκολο να δουλέψουμε με ακολουθίες.
- ▶ Μετατρέπουμε τις ακολουθίες σε γεννήτριες συναρτήσεις (τις οποίες μπορούμε να διαχειριστούμε ευκολότερα, γιατί μοιάζουν με πολυώνυμα), καταλήγουμε σε μια τελική γεννήτρια συνάρτηση και επιστρέφουμε στην τελική ακολουθία, που δίνει λύση στο πρόβλημά μας.



- ▶ Από γεωμετρικές προόδους θα χρειαστούμε τους τύπους:

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^n = \frac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda}$$

- ▶ ενώ, όταν έχουμε άπειρους όρους:

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots = \frac{1}{1 - \lambda}, \text{ ισχύει μόνον όταν } \lambda < 1$$

- ▶ Η εκθετική συνάρτηση e^x μπορεί να γραφεί και ως άπειρη σειρά ως:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$



Παράδειγμα

Ποια είναι η γεννήτρια συνάρτηση της σταθερής ακολουθίας $\alpha_n = n + 1$;

- ▶ Πρόκειται για την ακολουθία $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 4, \dots$. Επομένως, η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots$$

- ▶ Για να βρούμε 'κλειστό' τύπο, παρατηρούμε ότι οι όροι είναι παράγωγοι των δυνάμεων του z :

$$z' + (z^2)' + (z^3)' + (z^4)' + \dots = (z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots)' =$$

$$[z(1 + z + z^2 + z^3 + \dots)]' = \left[z \frac{1}{1-z} \right]' =$$

$$\left(\frac{z}{1-z} \right)' = \frac{1}{(1-z)^2}$$



- ▶ Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε n αντικείμενα όταν...;
- ▶ Αφού κάνουμε διεργασίες (θα δούμε στη συνέχεια πώς), καταλήγουμε σε μία γεννήτρια συνάρτηση:

$$\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \dots$$

και η απάντηση βρίσκεται στο συντελεστή του z^n , δηλ. μπορούμε να διαλέξουμε n αντικείμενα με α_n τρόπους:

3 αντικείμενα με α_3 τρόπους

100 αντικείμενα με α_{100} τρόπους...

- ▶ Δηλ. δε χρειάζεται να λύσουμε το πρόβλημα χωριστά για $n = 3$, για $n = 100$ κτλ: το λύνουμε μια και καλή και οι συντελεστές α_n δίνουν την απάντηση για κάθε n .



Πρακτικά στις ασκήσεις

Όταν επιλέγουμε αντικείμενα ενός συγκεκριμένου είδους, αντιστοιχεί ένας παράγοντας, που είναι κομμάτι του:

$$z^0 + z^1 + z^2 + z^3 + z^4 + \dots$$

Οι εκθέτες δείχνουν τις επιλογές, που μπορούμε να κάνουμε:

- ▶ Αν θέλουμε να επιλέξουμε από 3 μέχρι 6 αντικείμενα:

$$(z^3 + z^4 + z^5 + z^6)$$

- ▶ Αν θέλουμε να επιλέξουμε από 0 είτε 1 είτε 5 είτε 7 αντικείμενα:

$$(z^0 + z^1 + z^5 + z^7) = (1 + z + z^5 + z^7)$$

- ▶ Αν θέλουμε να επιλέξουμε το πολύ 2 αντικείμενα:

$$(z^0 + z^1 + z^2) = (1 + z + z^2)$$

- ▶ Αν θέλουμε να επιλέξουμε τουλάχιστον 5 αντικείμενα:

$$(z^5 + z^6 + z^7 + \dots)$$



Πρακτικά στις ασκήσεις

Όταν επιλέγουμε αντικείμενα ενός συγκεκριμένου είδους, αντιστοιχεί ένας παράγοντας, που είναι κομμάτι του:

$$z^0 + z^1 + z^2 + z^3 + z^4 + \dots$$

Οι εκθέτες δείχνουν τις επιλογές, που μπορούμε να κάνουμε:

- ▶ Αν θέλουμε να επιλέξουμε περιττό πλήθος αντικειμένων, το πολύ 5:

$$(z^1 + z^3 + z^5) = (z + z^3 + z^5)$$

- ▶ Αν δεν υπάρχει περιορισμός, τότε αντιστοιχεί ολόκληρη η παραπάνω παράσταση.

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για κάθε είδος ίδιων αντικειμένων ξεχωριστά, και στο τέλος πολλαπλασιάζουμε τους παράγοντες, που βρήκαμε.



Έχουμε 2 άσπρες και 3 μαύρες μπάλες. Θέλουμε να διαλέξουμε μερικές μπάλες (δε μάς ενδιαφέρει η σειρά), αλλά με τον εξής περιορισμό:

να διαλέξουμε υποχρεωτικά τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες

- ▶ Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 0 μπάλες;
Με κανέναν, αφού πρέπει να έχω τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες.
- ▶ Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 1 μπάλα;
Με κανέναν, αφού πρέπει να έχω τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες.
- ▶ Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 2 μπάλες;
Με 1: 2 μαύρες - αφού πρέπει να έχω τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες.



Έχουμε 2 άσπρες και 3 μαύρες μπάλες. Θέλουμε να διαλέξουμε μερικές μπάλες (δε μάς ενδιαφέρει η σειρά), αλλά με τον εξής περιορισμό:

να διαλέξουμε υποχρεωτικά τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες

- ▶ Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 3 μπάλες;
Με 2: 3 μαύρες ή 1 άσπρη και 2 μαύρες μπάλες.
- ▶ Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 4 μπάλες;
Με 2: 3 μαύρες και 1 άσπρη ή 2 μαύρες και 2 άσπρες.
- ▶ Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 5 μπάλες;
Με 1: να τις επιλέξω όλες - 3 μαύρες και 2 άσπρες.

Πώς μπορούμε να πάρουμε τα ίδια αποτελέσματα με μια γεννήτρια συνάρτηση;



Έχουμε 2 άσπρες και 3 μαύρες μπάλες. Θέλουμε να διαλέξουμε μερικές μπάλες (δε μάς ενδιαφέρει η σειρά), αλλά με τον εξής περιορισμό:

να διαλέξουμε υποχρεωτικά τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες

Έχουμε 2 άσπρες μπάλες, άρα στην επιλογή των άσπρων μπαλών αντιστοιχεί ο παράγοντας:

$$(z^0 + z^1 + z^2) = (1 + z + z^2)$$

Έχουμε 3 μαύρες μπάλες και πρέπει υποχρεωτικά να επιλέξουμε 2 μαύρες μπάλες, άρα στην επιλογή των μαύρων μπαλών αντιστοιχεί ο παράγοντας:

$$(z^2 + z^3)$$

Επομένως, η γεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$A(x) = (1 + z + z^2)(z^2 + z^3) = z^2 + 2z^3 + 2z^4 + z^5 = \\ 0z^0 + 0z^1 + 1z^2 + 2z^3 + 2z^4 + 1z^5$$



Αν σε μια ομάδα έχουμε άπειρα αντικείμενα, από τα οποία μπορούμε να διαλέξουμε, ο αντίστοιχος παράγοντας είναι κομμάτι του:

$$(1 + z + z^2 + z^3 + \dots)$$

το οποίο αν το δούμε σαν άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου ισούται με:

$$\frac{1}{1 - z} = (1 - z)^{-1}$$



Όταν τα αντικείμενα έχουν κάποιο μέγεθος (π.χ., βάρη, νομισματική αξία, κτλ.)

Παράδειγμα: Έχουμε 2 άσπρες των 5 κιλών και άπειρες μαύρες μπάλες των 10 κιλών.

Αλλάζει κάτι στο ερώτημα “Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 5 μπάλες;”

ΟΧΙ, αφού το βάρος δεν παίζει κανένα ρόλο, η απάντηση και πάλι είναι 3.

Άλλο ερώτημα “Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω μπάλες ώστε να συγκεντρώσω βάρος 40 κιλών;”

Πρακτικά, οι τρόποι είναι 2:

$5 + 5 + 10 + 10 + 10$ και $10 + 10 + 10 + 10$

Πώς θα πέραμε αυτή την απάντηση με γεννήτριες;



“Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω μπάλες ώστε να συγκεντρώσω βάρος 40 κιλών;”

Σε κάθε παράγοντα της γεννήτριας συνάρτησης οι δυνάμεις του z θα δείχνουν πόσα κιλά μπορούμε να συγκεντρώσουμε:

Στην επιλογή των 5-κιλων (άσπρων) μπαλών αντιστοιχεί ο παράγοντας

$$(z^0 + z^5 + z^{10})$$

αφού με δύο 5-κιλες μπάλες μπορούμε να συγκεντρώσουμε 0 ή 5 ή 10 κιλά.

Στην επιλογή των 10-κιλων (μαύρων) μπαλών, επειδή θέλουμε τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες, αντιστοιχεί ο παράγοντας:

$$(z^{20} + z^{30} + z^{40} + \dots)$$

Επομένως, η γεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$\begin{aligned} A(x) &= (1 + z^5 + z^{10})(z^{20} + z^{30} + z^{40} + \dots) = \\ &= (z^{20} + z^{30} + z^{40} + \dots) + (z^{25} + z^{35} + z^{45} + \dots) + (z^{30} + z^{40} + z^{50} + \dots) = \\ &= z^{20} + 2z^{30} + z^{35} + 2z^{40} + z^{45} + 2z^{50} + \dots \end{aligned}$$

Πράγματι, ο συνετελεστής του z^{40} , που μάς ενδιαφέρει είναι 2.



Χρήσιμες σχέσεις για υπολογισμό γεννητριών συναρτήσεων

$$1. 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

$$2. (1 + z)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k$$

$$3. (1 + z)^{-n} = \sum_{k=0}^n \binom{-n}{k} z^k \text{ όπου } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ και}$$

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{k+n-1}{k}$$

Αν στις παραπάνω σχέσεις στη θέση του z βάλουμε $-z$ έχουμε:



Χρήσιμες σχέσεις για υπολογισμό γεννητριών συναρτήσεων

$$4. (1 - z)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-z)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k z^k$$

$$5. (1 - z)^{-n} = \sum_{k=0}^n \binom{-n}{k} (-z)^k =$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{k+n-1}{k} (-1)^k z^k = \sum_{k=0}^n \binom{k+n-1}{k} z^k$$



Παραδείγματα

Ακολουθία: 1, 0, 0, 1

Γεννήτρια συνάρτηση: $1 \cdot z^0 + 0 \cdot z^1 + 0 \cdot z^2 + 1 \cdot z^3 = 1 + z^3$

Ακολουθία: 1, 2, 1, 0, 0, 0, ...

Γεννήτρια συνάρτηση:

$1 \cdot z^0 + 2 \cdot z^1 + 1 \cdot z^2 + 0 \cdot z^3 + 0 \cdot z^4 + \dots = 1 + 2z + z^2 = (1 + z)^2$

Ακολουθία: $\underbrace{1, 1, 1, \dots, 1}_{n+1 \text{ όροι}}$

Γεννήτρια συνάρτηση: $1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$

Ακολουθία: 1, -1, 1, -1, ...

Γεννήτρια συνάρτηση: $1 - z + z^2 - z^3 + \dots = \frac{1}{1 + z}$

Ακολουθία: $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$

Γεννήτρια συνάρτηση:

$\binom{n}{0} \cdot z^0 + \binom{n}{1} \cdot z^1 + \binom{n}{2} \cdot z^2 + \binom{n}{3} \cdot z^3 + \dots + \binom{n}{n} \cdot z^n = (1 + z)^n$



Έχουμε άσπρες μπάλες και διαλέγουμε κάποιες από αυτές. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

- ▶ Μπορούμε να διαλέξουμε $0, 1, 2, \dots$ άσπρες μπάλες με 1 τρόπο κάθε φορά.
- ▶ Άρα, η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{1}{1 - z}$$



Έχουμε άσπρες, πράσινες και κόκκινες μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε r από αυτές;

- ▶ Από τις άσπρες μπάλες μπορούμε να διαλέξουμε με 1 τρόπο κάθε φορά $0, 1, 2, 3, \dots$ από αυτές \Rightarrow

Γεννήτρια συνάρτηση για τις άσπρες μπάλες είναι:

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{1}{1 - z}$$

- ▶ Από τις πράσινες μπάλες μπορούμε να διαλέξουμε με 1 τρόπο κάθε φορά $0, 1, 2, 3, \dots$ από αυτές \Rightarrow

Γεννήτρια συνάρτηση για τις πράσινες μπάλες:

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{1}{1 - z}$$

- ▶ Από τις κόκκινες μπάλες μπορούμε να διαλέξουμε με 1 τρόπο κάθε φορά $0, 1, 2, 3, \dots$ από αυτές \Rightarrow

Γεννήτρια συνάρτηση για τις κόκκινες μπάλες:

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{1}{1 - z}$$



Έχουμε άσπρες, πράσινες και κόκκινες μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε r από αυτές;

- ▶ Άρα, η τελική γεννήτρια συνάρτηση για το “διαλέγω κάποιες από άσπρες, πράσινες και κόκκινες μπάλες ” είναι η: $(\frac{1}{1-z})^3$
- ▶ Το πλήθος των τρόπων, με τους οποίους, μπορώ να διαλέξω r από αυτές δίνεται από το συντελεστή του z^r στο $(\frac{1}{1-z})^3$
- ▶ $(\frac{1}{1-z})^3 = (1-z)^{-3} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2+k}{k} z^k$
- ▶ Οπότε ο συντελεστής του z^r στο $(\frac{1}{1-z})^3$ είναι: $\binom{2+r}{r}$, που είναι το πλήθος των ζητούμενων τρόπων.



Έχουμε άσπρες, πράσινες και κόκκινες μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε r από αυτές;

Με απλή συνδυαστική: θέλω να διαλέξω r από 3 αντικείμενα με επαναλήψεις: αυτό μπορεί να γίνει με:

$$\binom{3+r-1}{r} = \binom{2+r}{r}$$

τρόπους.



Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε $2n$ ίδιες μπάλες σε 3 διαφορετικά κουτιά, ώστε κάθε κουτί να έχει το πολύ n μπάλες;

- ▶ Για κάθε κουτί, η γεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

- ▶ Επομένως, η τελική γεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$A(z) = \left(\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right)^3$$

- ▶ Το ζητούμενο πλήθος τρόπων δίνεται από το συντελεστή του z^{2n+1} στην παραπάνω παράσταση.

- ▶
$$A(z) = (1 - 3z^{n+1} + 3z^{2n+2} - z^{3n+3})(1 - z)^{-3} =$$
$$(1 - 3z^{n+1} + 3z^{2n+2} - z^{3n+3}) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+2}{2} z^k \right)$$

- ▶ Ο συντελεστής του z^{2n+1} είναι: $\binom{2n+3}{2} - 3\binom{n+2}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$



Ποιος είναι ο αριθμός λύσεων της εξίσωσης

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 30 \text{ στους φυσικούς αν } z_1 \text{ άρτιος } \leq 10, \\ z_2 \text{ περιττός } \leq 11, 3 \leq z_3 \leq 10, 0 \leq z_4 \leq 15;$$

Οι γεννήτριες συναρτήσεις είναι:

$$\text{Για τη μεταβλητή } z_1: 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{10}$$

$$\text{Για τη μεταβλητή } z_2: x + x^3 + x^5 + \dots + x^{11}$$

$$\text{Για τη μεταβλητή } z_3: x^3 + x^4 + x^5 + \dots + x^{10}$$

$$\text{Για τη μεταβλητή } z_4: 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{15}$$

$$\text{Δηλ. τελικά: } (1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{10})(x + x^3 + x^5 + \dots + x^{11})(x^3 + x^4 + x^5 + \dots + x^{10})(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{15})$$

Το ζητούμενο πλήθος τρόπων δίνεται από το συντελεστή του x^{30} στην παραπάνω παράσταση που είναι 185.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Είναι διαφορετικός από το συντελεστή του x^{30} στην παράσταση: $(1 + x^2 + x^4 + \dots)(x + x^3 + x^5 + \dots)(x^3 + x^4 + x^5 + \dots)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)$