Έχουμε κέρματα των 20 λεπτών, 50 λεπτών, 1 ευρώ κ ευρώ. Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω κέρματα συνολικής αξίας *n* ευρώ, διαλέγοντας υποχρεωτικά τουλάχιστον 1 κέρμα από κάθε είδος;

Κωδικοποιούμε στον εκθέτη την αξία των κερμάτων σε λεπτά.
Οι γεννήτριες συναρτήσεις είναι:
Για τα 20-λεπτα: $z^{20} + z^{40} + z^{60} + \ldots$
Για τα 50-λεπτα: $z^{50} + z^{100} + z^{150} + \ldots$
Για τα 1-ευρα: $z^{100} + z^{200} + z^{300} + \ldots$
Για τα 2-ευρα: $z^{200} + z^{400} + z^{600} + \ldots$
Δηλ. τελικά: $(z^{20} + z^{40} + z^{60} + \ldots)(z^{50} + z^{100} + z^{150} + \ldots)(z^{100} + z^{200} + z^{300} + \ldots)(z^{200} + z^{400} + z^{600} + \ldots)$
Το ζητούμενο πλήθος τρόπων δίνεται από το συντελεστή του z^{100n} στην παραπάνω παράσταση.

Με πόσους τρόπους 100 ίδιοι επιβάτες μπορούν να κατεβούν σε 4 διαφορετικές στάσεις;

- Αναζητούμε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$ με $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
- Η γεννήτρια συνάρτηση για κάθε στάση είναι: $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$ - δε σταματάω στο 100, γιατί μπορεί να υπάρχουν κι άλλοι επιβάτες
- Η τελική γεννήτρια συνάρτηση είναι: $$(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots)^4 = \left(\frac{1}{1-z}\right)^4 = \frac{1}{(1-z)^4}$$
- Το ζητούμενο πλήθος τρόπων δίνεται από το συντελεστή του z^{100} στην παραπάνω παράσταση, που είναι $C(103, 100)$.

Εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις

Όταν ενδιαφερόμαστε για ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ και όχι για ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΥΣ χρησιμοποιούμε **εκθετική γεννήτρια συνάρτηση**.

Σκεφτόμαστε ακριβώς, όπως πριν, μόνο που τώρα παίρνουμε **κομμάτια της σειράς**:

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = e^x$$

ΓΙΑΤΙ; Σε ό,τι έχουμε δει έως τώρα, ο συντελεστής του z^r δείχνει το πλήθος των συνδυασμών r αντικειμένων από n αντικείμενα.

Όμως $C(n,k) = \dfrac{P(n,r)}{P(r,r)}$.

Οπότε για να δείχνει ο συντελεστής του z^r διατάξεις πρέπει να διαιρούμε με $P(r,r)$.

Όταν υπολογίσουμε την τελική εκθετική γεννήτρια συνάρτηση, η απάντηση στο ερώτημα "**με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε** n **αντικείμενα όταν...**" θα βρίσκεται στο συντελεστή του $\dfrac{z^n}{n!}$.

Με πόσους τρόπους μπορούμε να εκτυπώσουμε 25 διαφορετικά αρχεία σε 3 διαφορετικούς εκτυπωτές, με τον περιορισμό ότι κάθε εκτυπωτής πρέπει να εκτυπώσει τουλάχιστον ένα αρχείο;

- Ουσιαστικά ψάχνουμε το πλήθος των τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να διατάξουμε 25 αντικείμενα επιλεγμένα από 3 αντικείμενα, όταν επιτρέπονται επαναλήψεις των 3 αντικειμένων.
- Για τον 1ο εκτυπωτή - αφού πρέπει οπωσδήποτε να λάβει ένα τουλάχιστον αρχείο - η γεννήτρια συνάρτηση είναι:
$z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^{25}}{25!} = e^z - 1.$
Όμοια για το 2ο και 3ο εκτυπωτή.
- Η τελική γεννήτρια συνάρτηση για όλους τους εκτυπωτές είναι: $(e^z - 1)^3$ και το πλήθος των ζητούμενων τρόπων δίνεται από το συντελεστή του $\frac{z^{25}}{25!}$ στο $(e^z - 1)^3$.

Με πόσους τρόπους μπορούμε να εκτυπώσουμε 25 διαφορετικά αρχεία σε 3 διαφορετικούς εκτυπωτές, με τον περιορισμό ότι κάθε εκτυπωτής πρέπει να εκτυπώσει τουλάχιστον ένα αρχείο;

Κάνουμε πράξεις:

$$(e^z - 1)^3 = e^{3z} - 3e^{2z} + 3e^z - 1 =$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} 3^r \frac{z^r}{r!} - 3\sum_{r=0}^{\infty} 2^r \frac{z^r}{r!} + 3\sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{r!} - 1 =$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} (3^r - 3 \cdot 2^r + 3)\frac{z^r}{r!} - 1$$

Επομένως, ο συντελεστής του $\frac{z^{25}}{25!}$ είναι $3^{25} - 3 \cdot 2^{25} + 3$.

Χρήσιμοι τύποι

- Άθροισμα n αρχικών όρων γεωμετρικής προόδου:
  $$1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$
- Άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου (όταν $x \leq 1$):
  $$1 + x + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{1 - x}$$
- Διωνυμικό ανάπτυγμα: $(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$
- Για $-n$: $(1 + x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k$
- Όταν $n < 0$: $\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{k - n - 1}{k}$ ή
  $$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{k + n - 1}{k}$$

Χρήσιμοι τύποι

- Για $-x$:
$$(1-x)^n = (1+(-x))^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} x^k$$
- $$(1-x)^{-n} = (1+(-x))^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-x)^k =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (-1)^k \binom{k+n-1}{k} x^k =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^2 k \binom{k+n-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} x^k$$

Χρήσιμοι τύποι

- $1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} = e^x$
- $e^{\alpha x} = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha^r \frac{x^r}{r!}$
- $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Ποιο είναι το πλήθος των πενταδικών συμβολοσειρών μήκους n με άρτιο πλήθος 1;

Εκθετικός απαριθμητής για τα ψηφία 0,2,3,4:

$$(1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots)^4=(e^x)^4$$

Εκθετικός απαριθμητής για το ψηφίο 1:

$$x^0+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots=\frac{(e^x+e^{-x})}{2}$$

Η τελική γεννήτρια συνάρτηση είναι: $e^{4x}\cdot\frac{(e^x+e^{-x})}{2}=$

$$\frac{(e^{5x}+e^{3x})}{2}=\frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{\infty}5^k\frac{x^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}3^k\frac{x^k}{k!})=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(5^k+3^k)\frac{x^k}{k!}$$

Ο συντελεστής του $\frac{x^n}{n!}$, που δείχνει το ζητούμενο πλήθος τρόπων είναι: $\frac{1}{2}(5^n+3^n)$

Με πόσους τρόπους ένα σύνολο από $r \geq 6$ ίδια αντικείμενα μπορεί να διαχωριστεί σε 3 διαφορετικά υποσύνολα, ανά δύο ξένα μεταξύ τους, ώστε κάθε υποσύνολο να έχει τουλάχιστον 2 αντικείμενα (η ένωση των 3 υποσυνόλων θα περιέχει όλα τα r αντικείμενα);

- Για να έχει κάθε ένα από τα 3 υποσύνολα τουλάχιστον δύο αντικείμενα, παίρνουμε 6 αντικείμενα και τα τοποθετούμε από 2 σε κάθε υποσύνολο. Αφού τα αντικείμενα είναι ίδια, δε μάς ενδιαφέρει ποια αντικείμενα θα τοποθετήσουμε σε κάθε υποσύνολο, αρκεί να είναι 2.
- Ο συνολικός αριθμός των τρόπων να μοιράσουμε τα υπόλοιπα $r-6$ ίδια αντικείμενα προκύπτει ως εξής:
  - Σε κάθε αντικείμενο από τα $r-6$ αναθέτουμε ένα υποσύνολο από τα 3.
  - Αυτό γίνεται με τους τρόπους, που μπορούμε να διαλέξουμε $(r-6)$ αντικείμενα από 3 με επανάληψη:
    $$\binom{r-6+3-1}{r-6} = \binom{r-4}{r-6} = \frac{(r-4)(r-5)}{2}$$

Με πόσους τρόπους ένα σύνολο από $r \geq 6$ ίδια αντικείμενα μπορεί να διαχωριστεί σε 3 διαφορετικά υποσύνολα, ανά δύο ξένα μεταξύ τους, ώστε κάθε υποσύνολο να έχει τουλάχιστον 2 αντικείμενα (η ένωση των 3 υποσυνόλων θα περιέχει όλα τα r αντικείμενα);

- Η γεννήτρια συνάρτηση έχει σα συντελεστές τον αριθμό των τρόπων, που μπορούμε να τοποθετήσουμε τα r αντικείμενα στα 3 υποσύνολα, με τον περιορισμό ότι κάθε υποσύνολο έχει τουλάχιστον 2 αντικείμενα.

$$A(x) = (x^2+x^3+x^4+\ldots)(x^2+x^3+x^4+\ldots)(x^2+x^3+x^4+\ldots)$$

$$A(x) = x^6(1+x+x^2+\ldots)(1+x+x^2+\ldots)(1+x+x^2+\ldots) =$$

$$x^6\left(\frac{1}{1-x}\right)^3 = x^6(1-x)^{-3} = x^6\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-3}{k}x^k$$

$$= x^6\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k-1}{k}x^k$$

Με πόσους τρόπους ένα σύνολο από $r \geq 6$ ίδια αντικείμενα μπορεί να διαχωριστεί σε 3 διαφορετικά υποσύνολα, ανά δύο ξένα μεταξύ τους, ώστε κάθε υποσύνολο να έχει τουλάχιστον 2 αντικείμενα (η ένωση των 3 υποσυνόλων θα περιέχει όλα τα r αντικείμενα);

$$A(x) = x^6 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{3+k-1}{k} x^k$$

- Για να βρούμε το συντελεστή του x^r, που είναι η απάντηση στην ερώτηση θέτουμε $k = r - 6$ και έχουμε $\binom{r-6+3-1}{r-6} = \binom{r-4}{r-6} = \frac{(r-4)(r-5)}{2}$

Δείξτε ότι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\alpha_r = \binom{2r}{r}$ είναι η $A(x) = (1-4x)^{-1/2}$.

Από το διωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε: $(1+x)^n =$

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!} x^r \Rightarrow (1-4x)^{-1/2} =$$

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)...(-\frac{1}{2}-r+1)}{r!} (-4x)^r =$$

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{4^r(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})(\frac{5}{2})...(\frac{2r-1}{2})}{r!} x^r =$$

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2^r(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2r-1))}{r!} x^r =$$

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2^r r!(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2r-1))}{r!r!} x^r =$$

Δείξτε ότι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\alpha_r = \binom{2r}{r}$ είναι η $A(x) = (1-4x)^{-1/2}$.

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2r)(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2r-1))}{r!r!} x^r =$$

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(2r)!}{r!r!} x^r =$$

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \binom{2r}{r} x^r =$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \binom{2r}{r} x^r$$

Άρα, η ακολουθία $\alpha_r = \binom{2r}{r}$ έχει γεννήτρια συνάρτηση την $A(x) = (1-4x)^{-1/2}$.

Έχουμε απεριόριστο αριθμό κερμάτων των 50, 20 και λεπτών και θέλουμε να διαλέξουμε 10 κέρματα. Δώστε τη γεννήτρια συνάρτηση και το πλήθος των τρόπων για αυτή την επιλογή.

- Έστω α_k ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων να διαλέξουμε k κέρματα.
- Για κάθε είδος κερμάτων, μπορούμε να διαλέξουμε κανένα, 1,2,.... Αυτό κωδικοποιείται στη ΓΣ $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$.
- Αφού έχουμε 3 διαφορετικά είδη κερμάτων, η ΓΣ για την α_k είναι $(1-x)^{-3}$.
- Το ζητούμενο δίνεται από το α_{10}, που είναι ο συντελεστής του x^{10} στο ανάπτυγμα της ΓΣ.
- Εφαρμόζουμε το διωνυμικό ανάπτυγμα και βρίσκουμε ότι ο ζητούμενος συντελεστής είναι: $\binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$.
- Η λύση προκύπτει και με συνδυασμούς αντικειμένων με επανάληψη.

Έχουμε απεριόριστο αριθμό κερμάτων των 50, 20 και λεπτών. Δώστε τη γεννήτρια συνάρτηση και το πλήθος των τρόπων για να σχηματίσουμε το ποσό των 2 ευρώ.

- Έστω α_k ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων να σχηματίσουμε το ποσό των k λεπτών διαλέγοντας από τα παραπάνω κέρματα.
- Για τα 50-λεπτα, η ΓΣ είναι: $1 + x^{50} + x^{100} + \ldots = \frac{1}{1-x^{50}}$.
- Για τα 10-λεπτα, η ΓΣ είναι: $1 + x^{20} + x^{40} + \ldots = \frac{1}{1-x^{20}}$.
- Για τα 20-λεπτα, η ΓΣ είναι: $1 + x^{10} + x^{20} + \ldots = \frac{1}{1-x^{10}}$.
- Πολλαπλασιάζοντας τις ΓΣ για κάθε είδος κερμάτων έχουμε τη ΓΣ για την ακολουθία α_k

$$(\frac{1}{1-x^{50}})(\frac{1}{1-x^{20}})(\frac{1}{1-x^{10}})$$

- Αφού θέλουμε να σχηματίσουμε το ποσό των 200 λεπτών (=2 ευρώ), το ζητούμενο δίνεται από το συντελεστή του x^{200} στο ανάπτυγμα της ΓΣ, που (κάνοντας πράξεις) είναι 29. Γιατί;

$$(\frac{1}{1-x^{50}})(\frac{1}{1-x^{20}})(\frac{1}{1-x^{10}}) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}(-1)^k x^{50k} + \sum_{l=0}^{\infty}\binom{-1}{l}(-1)^l x^{20l} +$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-1}{r}(-1)^r x^{10r} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{50k} + \sum_{l=0}^{\infty} x^{20l} + \sum_{r=0}^{\infty} x^{10r} =$$

$$\sum_{k,l,r=0}^{\infty} x^{50k+20l+10r}$$

Ουσιαστικά αναζητώ το συντελεστή του x^{200} στο παραπάνω ανάπτυγμα, δηλ., τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης:

$50k + 20l + 10r = 200 \Rightarrow 5k + 2l + r = 20$ με

$0 \leq k \leq 4, 0 \leq l \leq 10, 0 \leq r \leq 20.$

Για $k = 0$, προκύπτουν 11 λύσεις

Για $k = 1$, προκύπτουν 8 λύσεις

Για $k = 2$, προκύπτουν 6 λύσεις

Για $k = 3$, προκύπτουν 3 λύσεις

Για $k = 4$, προκύπτουν 1 λύση

Άρα, συνολικά: $11 + 8 + 6 + 3 + 1 = 29$ λύσεις.

Θέλουμε να μοιράσουμε 24 καραμέλες σε 4 παιδιά, ώ κάθε παιδί να πάρει τουλάχιστον 3 και το πολύ 8 καραμέλες. Δώστε τη γεννήτρια συνάρτηση και το πλήθος των τρόπων για να γίνει αυτό.

- Η ΓΣ για καθένα από τα 4 παιδιά είναι: $z^3 + z^4 + \ldots + z^8$.
- Η τελική ΓΣ είναι:

  $$(z^3+z^4+\ldots+z^8)^4 = z^{12}(1+z+z^2+\ldots+z^5)^4 = z^{12}\left(\frac{1-z^6}{1-z}\right)^4.$$
- Το ζητούμενο πλήθος τρόπων δίνεται από το συντελεστή του z^{24} στο ανάπτυγμα της παραπάνω ΓΣ, ο οποίος είναι ίδιος με το συντελεστή του z^{12} στο ανάπτυγμα της συνάρτησης $\left(\frac{1-z^6}{1-z}\right)^4$.
- ΠΡΟΣΟΧΗ: Δε μπορούμε να επεκτείνουμε το άθροισμα στο άπειρο, γιατί τα $z^9, \ldots, z^{24}$ συνεισφέρουν στο συντελεστή του z^{24}.

Θέλουμε να μοιράσουμε 24 καραμέλες σε 4 παιδιά ώς κάθε παιδί να πάρει τουλάχιστον 3 και το πολύ 8 καραμέλες. Δώστε τη γεννήτρια συνάρτηση και το πλήθος των τρόπων για να γίνει αυτό.

- Εφαρμόζουμε το διωνυμικό ανάπτυγμα για τη συνάρτηση: $\left(\dfrac{1-z^6}{1-z}\right)^4$.
- $(1-z^6)^4(1-z)^{-4} = (1-4z^6+6z^{12}+\ldots)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{3}z^k$
- Το z^{12} σχηματίζεται από το z^0 στον πρώτο όρο και από το z^{12} στο δεύτερο όρο (συντελεστής $\binom{15}{3}$), από το z^6 από κάθε όρο (συντελεστής $-4\binom{9}{3}$) και το z^{12} στον πρώτο όρο και το z^0 στο δεύτερο όρο (συντελεστής 6).
- Άρα, ο ζητούμενος συντελεστής είναι: $\binom{15}{3}+(-4)\binom{9}{3}+6=125$.

Να υπολογιστεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθί $1, 2, 3, ..., r, ...$

- $A(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + rx^{r-1} + ... =$
  $(x+x^2+x^3+...+x^r+...)' = [(1+x+x^2+x^3+...+x^r+...)-1]' =$
  $\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$

Να αποδειχθεί με χρήση γεννητριών συναρτήσεων η σχέση $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

- $\binom{n}{r}$ είναι οι συντελεστές του z^r στο ανάπτυγμα του $(1+z)^n$.
- Όμως,
  $(1+z)^n = (1+z)(1+z)^{n-1} = (1+z)^{n-1} + z(1+z)^{n-1}$.
- Στο παραπάνω άθροισμα, οι συντελεστές του z^r είναι:
  $\binom{n-1}{k}$ από τον πρώτο όρο και $\binom{n-1}{k-1}$ από το δεύτερο όρο,
  δηλ. συνολικά: $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\alpha_0, \alpha_1, \ldots,$ όπου α_r είναι ο αριθμός των τρόπων να επιλέξουμε (με επαναλήψεις) r γράμματα από το αλφάβητο $0, 1, 2$ με τον περιορισμό ότι το γράμμα 0 θα επιλεγεί άρτιο αριθμό φορών. Με βάση τη γεννήτρια συνάρτηση υπολογίστε το α_r.

- Η ΓΣ είναι:

$$A(x) = \underbrace{(1 + x^2 + x^4 + \ldots)}_{\text{για το } 0} \underbrace{(1 + x + x^2 + \ldots)}_{\text{για το } 1} \underbrace{(1 + x + x^2 + \ldots)}_{\text{για το } 2} =$$

$$\frac{1}{1 - x^2} \frac{1}{(1 - x)^2} = \frac{1}{1 + x} \frac{1}{(1 - x)^3}$$

- Αναλύοντας σε απλά κλάσματα (το πώς στην επόμενη διαφάνεια):
$A(x) = \frac{1}{8}(1 + x)^{-1} + \frac{1}{8}(1 - x)^{-1} + \frac{1}{4}(1 - x)^{-2} + \frac{1}{2}(1 - x)^{-3} =$

Ανάλυση σε άθροισμα απλών κλασμάτων

$$\frac{1}{(1+x)(1-x)^3} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{(1-x)^2} + \frac{D}{(1-x)^3}$$

$$1 = A(1-x)^3 + B(1+x)(1-x)^2 + C(1+x)(1-x) + D(1+x) \quad (1)$$

- Για $x = 1 \overbrace{\Longrightarrow}^{(1)} 1 = D \cdot 2 \Longrightarrow \boxed{D = \frac{1}{2}}$. Αντικαθιστούμε στην (1):

$$1 - \frac{1}{2}(1+x) = B(1+x)(1-x)^2 + C(1+x)(1-x) + A(1-x)^3 \quad (2)$$

Ανάλυση σε άθροισμα απλών κλασμάτων

- Για $x = -1 \overbrace{\Longrightarrow}^{(2)} 1 = A \cdot B \Longrightarrow \boxed{A = \frac{1}{8}}$. Αντικαθιστούμε στην (2):

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2}(1+x) - \frac{1}{8}(1-x)^3 &= B(1+x)(1-x)^2 + C(1+x)(1-x) \\ &= B(1-x^2)(1-x) + C(1-x^2) \\ &= B(1 - x - x^2 + x^3) + C(1-x)^2 \Longrightarrow \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \cdot 3(-1)(1-x)^2 = B(-1 - 2x + 3x^2) + C(-2x)$$

Παραγωγίζουμε και τα 2 μέλη $\Longrightarrow$

$$-\frac{1}{2} + \frac{3}{8}(1-x)^2 = B(3x^2 - 2x - 1) - 2x \cdot C \qquad (3)$$

Ανάλυση σε άθροισμα απλών κλασμάτων

- Για $x = 1 \overbrace{\Longrightarrow}^{(3)} -\frac{1}{2} = B(3-2-1) - 2 \cdot C \Longrightarrow \boxed{C = \frac{1}{4}}$

  Στην (3) για $C = \frac{1}{4} \Longrightarrow$

  $-\frac{1}{2} + \frac{3}{8}(1-x)^2 + 2x\frac{1}{4} = B(3x^2 - 2x - 1)$
- Για $x = -1 \Longrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \cdot 4 - \frac{1}{2} = B(3+2-1) \Longrightarrow$

  $-1 + \frac{3}{2} = 4B \Longrightarrow \frac{1}{2} = 4B \Longrightarrow \boxed{B = \frac{1}{8}}$

$$\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}x^k + \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}(-1)^k x^k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}(-1)^k x^k$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-3}{k}(-1)^k x^k =$$

$$\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k + \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}x^k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(k+2)}{2}x^k \Rightarrow$$

$$\alpha_r = \frac{1}{8}(-1)^r + \frac{1}{8} + \frac{r+1}{4} + \frac{(r+1)(r+2)}{4} =$$

$$\frac{1}{8}[1+(-1)^r] + \frac{(r+1)(r+3)}{4}$$

Να βρεθεί με χρήση απαριθμητών ο αριθμός των τρόπ να επιλέξουμε r αντικείμενα με απεριόριστες επαναλήψεις από n αντικείμενα.

- ΓΣ για καθένα από τα n αντικείμενα: $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$
- Η τελική ΓΣ είναι: $A(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^n$

  $A(x) = (1 + x + x^2 + \ldots)^n = (\frac{1}{1-x})^n = (1 - x)^{-n} =$

  $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k}(-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-k+1)}{k!}(-1)^k x^k =$

  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} x^k =$

  $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$
- Το πλήθος των τρόπων να επιλέξουμε r από τα αντικείμενα αυτά δίνεται από το συντελεστή του x^r στο ανάπτυγμα της $A(x)$ που είναι $\binom{n+r-1}{r}$.

Να βρεθεί ο απαριθμητής για τις επιλογές r αντικειμένων από n αντικείμενα ($r \geq n$) με απεριόριστες επαναλήψεις όταν κάθε αντικείμενο επιλέγεται τουλάχιστον μία φορά.

- Η ΓΣ για καθένα από τα n αντικείμενα είναι: $x + x^2 + x^3 + \ldots$
- Η τελική ΓΣ είναι: $A(x) = (x + x^2 + \ldots)^n = (\frac{1}{1-x} - 1)^n = \left(\frac{1-1+x}{1-x}\right)^n = \left(\frac{x}{1-x}\right)^n = x^n(1-x)^{-n} = x^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k}(-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^{n+k}$
- Το πλήθος των τρόπων να επιλέξουμε r από τα αντικείμενα αυτά δίνεται από το συντελεστή του x^r στο ανάπτυγμα της $A(x)$, που προκύπτει για $k = r - n$ και είναι $\binom{r-1}{r-n}$.