Να προσδιοριστεί ο συντελεστής του x^{15} στο ανάπτυ της $f(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + ...)^4$.

- $(x^2 + x^3 + x^4 + ...)^4 = \left[x^2(1 + x + x^2 + ...)\right]^4 = \left[x^2(\frac{1}{1-x})\right]^4 = x^8(\frac{1}{1-x})^4 = x^8(1-x)^{-4} = x^8 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \binom{-4}{k} x^k = x^8 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{3+k}{k} x^k$
- Ουσιαστικά αναζητώ το συντελεστή του x^7 στον όρο $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{3+k}{k} x^k$, που είναι: $\binom{10}{7} = 120$.

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 25 (ίδια) αντικείμενα σε 7 διαφορετικά κουτιά, με τον περιορισμό ότι το πρώτο κουτί δεν επιτρέπεται να έχει πάνω από 10 αντικείμενα;

- Η ΓΣ για το 1ο κουτί είναι: $1 + x + x^2 + ... + x^{10}$.
- Η ΓΣ για καθένα από τα υπόλοιπα 6 κουτιά είναι: $1 + x + x^2 + ...$
- Οπότε, η τελική ΓΣ για τα 7 κουτιά είναι:
$$(1 + x + x^2 + ... + x^{10})(1 + x + x^2 + ...)^6 =$$
$$\left(\frac{1 - x^{11}}{1 - x}\right)\left(\frac{1}{1 - x}\right)^6 = (1 - x)^{-7}(1 - x^{11}) =$$
$$\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-7}{k}x^k\right](1 - x^{11}) = \left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{6 + k}{k}x^k\right](1 - x^{11})$$

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 25 (ίδια) αντικείμενα σε 7 διαφορετικά κουτιά, με τον περιορισμό ότι το πρώτο κουτί δεν επιτρέπεται να έχει πάνω από 10 αντικείμενα;

- Το ζητούμενο πλήθος τρόπων δίνεται από το συντελεστή του x^{25} στο ανάπτυγμα του $\left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{6+k}{k} x^k\right](1-x^{11})$.
- Αυτός μπορεί να προκύψει είτε για $k=25$, είτε για $k=14$ και είναι: $\binom{6+25}{25} - \binom{6+14}{14} = \binom{31}{25} - \binom{20}{14} = 697521$

Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 25 παιχ από 7 διαφορετικά, που υπάρχουν συνολικά, όταν μπορούμε να επιλέξουμε από 2 έως 6 κομμάτια από κάθε παιχνίδι;

- Η ΓΣ για κάθε παιχνίδι είναι: $x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$.
- Η ΓΣ για όλα τα παιχνίδια είναι: $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^7 = \left(x^2(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)\right)^7 = x^{14}(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^7 = x^{14}\left(\frac{1 - x^5}{1 - x}\right)^7 = x^{14}(1 - x)^{-7}(1 - x^5)^7 = x^{14}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-7}{k}x^k\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{-7}{r}x^{5r}$
- Ουσιαστικά αναζητώ το συντελεστή του x^{11} στον όρο: $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-7}{k}x^k\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{7}{r}x^{5r} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{6+k}{k}x^k\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{7}{r}x^{5r}$
- Αυτός προκύπτει είτε για $k = 11, r = 0$, είτε για $k = 6, r = 1$, είτε για $k = 1, r = 2$.
- Άρα: $\binom{17}{11} + \binom{12}{6}(-1)\binom{7}{1} + \binom{7}{1}\binom{7}{2} = 12.376 - 6.468 + 147 = 6.055$.

Να βρεθεί γεννήτρια συνάρτηση για την ακολουθία α που έχει ως όρους της τους αριθμούς των τρόπων έκφρασης του r σαν άθροισμα διαφορετικών ακεραίων.

- Για κάθε ακέραιο k, το άθροισμα $1 + x^k$ εκφράζει το ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ακέραιο k καμία ή μία φορά στο άθροισμα για το σχηματισμό του ακεραίου r.
- Οπότε, για όλους τους ακέραιους η ΓΣ είναι: $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^4)...(1 + x^k)...$
- Η ΓΣ δείχνει ότι ο r μπορεί να σχηματιστεί με χρήση κάθε ακεραίου, το πολύ μία φορά.

Να βρεθεί η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για τον αριθμό α_r των τρόπων τοποθέτησης r (διαφορετικών) ανθρώπων σε 3 διαφορετικές αίθουσες, με 1 τουλάχιστον άνθρωπο σε κάθε αίθουσα. Ποια είναι η γεννήτρια συνάρτηση, όταν τεθεί ο περιορισμός ότι πρέπει να τοποθετηθεί άρτιος αριθμός ανθρώπων σε κάθε αίθουσα;

Και οι άνθρωποι και οι αίθουσες είναι διαφορετικές, οπότε αναζητούμε διατάξεις με τον περιορισμό ότι 1 τουλάχιστον άτομο θα πάει σε κάθε αίθουσα.

- Η ΓΣ για κάθε αίθουσα είναι:
  $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots - 1 = e^x - 1$
- Επομένως, η ΓΣ για τις 3 αίθουσες είναι:
  $(e^x - 1)^3 = e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1 =$
  $$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k \frac{x^k}{k!} - 3\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{x^k}{k!} + 3\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} (3^k - 3 \cdot 2^k + 3) \frac{x^k}{k!} - 1$$

Να βρεθεί η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για τον αριθμό α_r των τρόπων τοποθέτησης r (διαφορετικών) ανθρώπων σε 3 διαφορετικές αίθουσες με 1 τουλάχιστον άνθρωπο σε κάθε αίθουσα. Ποια είναι η γεννήτρια συνάρτηση, όταν τεθεί ο περιορισμός ότι πρέπει να τοποθετηθεί άρτιος αριθμός ανθρώπων σε κάθε αίθουσα;

Και οι άνθρωποι και οι αίθουσες είναι διαφορετικές, οπότε αναζητούμε διατάξεις με τον περιορισμό ότι 1 τουλάχιστον άτομο θα πάει σε κάθε αίθουσα.

- Η ΓΣ για κάθε αίθουσα είναι:
  $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots - 1 = e^x - 1$
- Επομένως, η ΓΣ για τις 3 αίθουσες είναι:

$$(e^x - 1)^3 = e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \frac{x^k}{k!} - 3\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{x^k}{k!} + 3\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(3^k - 3 \cdot 2^k + 3)}_{\alpha_r \text{ για } k=r} \frac{x^k}{k!} - 1$$

Να βρεθεί η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για τον αριθμό α_r των τρόπων τοποθέτησης r (διαφορετικών) ανθρώπων σε 3 διαφορετικές αίθουσες με 1 τουλάχιστον άνθρωπο σε κάθε αίθουσα. Ποια είναι η γεννήτρια συνάρτηση όταν τεθεί ο περιορισμός ότι πρέπει να τοποθετηθεί άρτιος αριθμός ανθρώπων σε κάθε αίθουσα;

Και οι άνθρωποι και οι αίθουσες είναι διαφορετικές, οπότε αναζητούμε διατάξεις με τον περιορισμό ότι άρτιο πλήθος ατόμων θα πάει σε κάθε αίθουσα.

- Η ΓΣ για κάθε αίθουσα είναι:
  $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
- Επομένως, η ΓΣ για τις 3 αίθουσες είναι:
  $[\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})]^3 = \frac{1}{8}(e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x}) =$
  $$\frac{1}{8}\left(\sum_{k=0}^{\infty} 3^k \frac{x^k}{k!} - 3\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + 3\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} 3^k(-1)^k \frac{x^k}{k!}\right)$$

Να βρεθεί η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για τον αριθμό α_r των τρόπων τοποθέτησης r (διαφορετικών) ανθρώπων σε 3 διαφορετικές αίθουσες με 1 τουλάχιστον άνθρωπο σε κάθε αίθουσα. Ποια είναι η γεννήτρια συνάρτηση, όταν τεθεί ο περιορισμός ότι πρέπει να τοποθετηθεί άρτιος αριθμός ανθρώπων σε κάθε αίθουσα;

- $\frac{1}{8}(\sum_{k=0}^{\infty} 3^k \frac{x^k}{k!} - 3\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + 3\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} 3^k(-1)^k \frac{x^k}{k!}) = \frac{1}{8}\left(\sum_{k=0}^{\infty}[3^k - 3 + 3(-1)^k - 3^k(-1)^k]\frac{x^k}{k!}\right)$

Να βρεθεί η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για τον αριθμό α_r των τρόπων τοποθέτησης r (διαφορετικών) ανθρώπων σε 3 διαφορετικές αίθουσες με 1 τουλάχιστον άνθρωπο σε κάθε αίθουσα. Ποια είναι η γεννήτρια συνάρτηση, όταν τεθεί ο περιορισμός ότι πρέπει να τοποθετηθεί άρτιος αριθμός ανθρώπων σε κάθε αίθουσα;

- $$\frac{1}{8}\left(\sum_{k=0}^{\infty} 3^k \frac{x^k}{k!} - 3\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + 3\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} 3^k(-1)^k \frac{x^k}{k!}\right) = \frac{1}{8}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{[3^k - 3 + 3(-1)^k - 3^k(-1)^k]}_{\alpha_r \text{ για } k=r} \frac{x^k}{k!}\right)$$

Βρείτε μια απλή έκφραση για τη γεννήτρια συνάρτηση της αριθμητικής ακολουθίας $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots$.

Έστω $A(z)$ η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας. Η ακολουθία ορίζεται από την αναδρομική σχέση:

$$\alpha_n = \alpha_{n-2} + 1, n \geq 2$$

με συνοριακές συνθήκες $\alpha_0 = \alpha 1 = 1$. Πολλαπλασιάζοντας με z^n και αθροίζοντας για όλα τα $n \geq 2$ έχουμε:

$$\alpha_n = \alpha_{n-2} + 1 \Rightarrow \alpha_n z^n = \alpha_{n-2} z^n + z^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n z^n = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_{n-2} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} z^n \Rightarrow$$

$$A(z) - \alpha_0 - \alpha_1 z = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n - 1 - z \Rightarrow$$

Βρείτε μια απλή έκφραση για τη γεννήτρια συνάρτηση της αριθμητικής ακολουθίας $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots$.

$$A(z) - 1 - z = z^2 A(z) + \frac{1}{1-z} - 1 - z \Rightarrow$$

$$(1-z^2)A(z) = \frac{1}{1-z} \Rightarrow$$

$$A(z) = \frac{1}{(1-z^2)(1-z)} = \frac{1}{(1+z)(1-z)^2}$$

- Άρα, η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας δίνεται από τη σχέση:

$$A(z) = \frac{1}{(1+z)(1-z)^2}$$

Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε r διαφορετικά αντικείμενα, που επιλέγονται από απεριόριστο αριθμό αντικειμένων n διαφορετικών ειδών;

- Η ΓΣ για κάθε είδος αντικειμένων είναι: $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
- Επομένως, η ΓΣ για όλα τα n είδη αντικειμένων είναι: $\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^n = (e^x)^n = e^{xn}$
- Ισχύει ότι: $e^{\alpha x} = \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} \alpha^r \frac{x^r}{r!}$, οπότε:
- $e^{xn} = \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} n^r \frac{x^r}{r!}$
- Το ζητούμενο πλήθος διατάξεων δίνεται από το συντελεστή του $\frac{x^r}{r!}$ στο παραπάνω ανάπτυγμα, που είναι n^r.

Ένα πλοίο έχει 48 σημαίες, από τις οποίες 12 κόκκινες, 12 άσπρες, 12 μπλε και 12 μαύρες. 12 από αυτές τις σημαίες τοποθετούνται σε έναν κατακόρυφο ιστό για να ανταλλάσσονται μηνύματα με άλλα πλοία. Πόσα από αυτά τα μηνύματα χρησιμοποιούν άρτιο αριθμό μπλε σημαιών και περιττό αριθμό μαύρων σημαιών;

- ΓΣ για άρτιο αριθμό μπλε σημαιών: $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$
- ΓΣ για περιττό αριθμό μαύρων σημαιών: $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$
- ΓΣ για κόκκινες και άσπρες (δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός): $(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots)^2$
- Επομένως, η τελική ΓΣ είναι:

$$f(x) = (e^x)^2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{4}e^{2x}(e^{2x} - e^{-2x})$$

$$= \frac{1}{4}(e^{4x} - 1) = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(4x)^i}{i!} - 1\right) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(4x)^i}{i!}$$

Ένα πλοίο έχει 48 σημαίες, από τις οποίες 12 κόκκινε άσπρες, 12 μπλε και 12 μαύρες. 12 από αυτές τις σημαίες τοποθετούνται σε έναν κατακόρυφο ιστό για να ανταλλάσσονται μηνύματα με άλλα πλοία. Πόσα από αυτά τα μηνύματα χρησιμοποιούν άρτιο αριθμό μπλε σημαιών και περιττό αριθμό μαύρων σημαιών;

- Επομένως, ο συντελεστής του $\frac{x^{12}}{12!}$ στη συνάρτηση $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(4x)^i}{i!}$, που δίνει το ζητούμενο αριθμο μηνυμάτων είναι: $\frac{1}{4}4^{12} = 4^{11} = 4.194.304$.

Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων να διαμερίσω ένα σύνολο από k διακεκριμένα αντικείμενα σε n υποσύνολα μη κενά και ανά δυο ξένα.

- Αν θεωρήσουμε ότι τα n υποσύνολα αντιστοιχούν σε n υποδοχές, τότε οι απαιτήσεις για τα υποσύνολα να είναι ανά δυο ξένα και μη κενά, μετατρέπονται στους περιορισμούς για τις υποδοχές να είναι διακεκριμένες και να έχουν τουλάχιστον ένα αντικείμενο, αντίστοιχα.
- Επομένως, ο αριθμός, που ψάχνουμε είναι το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος, με τη διαφορά ότι αφού δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των στοιχείων μέσα στα υποσύνολα (ή των αντικειμένων στις υποδοχές αντίστοιχα), θα πρέπει να διαιρέσουμε με $n!$. Άρα:
$$\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(n-k)^r\right)\frac{1}{n!}$$

Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων να διαμερίσω ένα σύνολο από k διακεκριμένα αντικείμενα σε n υποσύνολα μη κενά και ανά δυο ξένα.

- Ο προηγούμενος αριθμός λέγεται και αριθμός Stirling δευτέρου είδους και συμβολίζεται με:
$S(k, n) = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left(\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (n-1)^k (-1)^i \right) \frac{1}{n!}$
- Για τους αριθμούς Stirling δευτέρου είδους ισχύει ο παρακάτω αναδρομικός τύπος:
$S(k+1, n+1) = S(k, n) + (n+1) S(k, n+1)$

Ιδιότητες γεννητριών συναρτήσεων

Θεωρούμε ακολουθίες $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ και $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n, ...$ με γεννήτριες συναρτήσεις $A(x)$ και $B(x)$ αντίστοιχα.
Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

- Γραμμική ιδιότητα
- Ιδιότητα κλίμακας
- Ιδιότητα ολίσθησης
- Ιδιότητα μερικών αθροισμάτων
- Ιδιότητα συμπληρωματικών μερικών αθροισμάτων
- Ιδιότητα παραγώγου
- Ιδιότητα ολοκλήρωσης
- Ιδιότητα συνέλιξης

Γραμμική ιδιότητα

Η ακολουθία $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ έχει γεννήτρια συνάρτηση την $A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^r$.

Η ακολουθία $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n, ...)$ έχει γεννήτρια συνάρτηση τη $B(x) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r$.

Έστω c, d σταθερές.

Η ΓΣ της ακολουθίας $c \cdot \alpha + d \cdot \beta$ είναι η $c \cdot A(x) + d \cdot B(x)$. Γιατί;

Η ΓΣ της $c \cdot \alpha + d \cdot \beta$ θα είναι η

$$\Gamma(x) = \sum_{r=0}^{\infty}(c \cdot \alpha_r + d \cdot \beta_r)x^r = \sum_{r=0}^{\infty}(c \cdot \alpha_r x^r + d \cdot \beta_r x^r) =$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} c \cdot \alpha_r x^r + \sum_{r=0}^{\infty} d \cdot \beta_r x^r = c \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^r + d \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \beta_r x^r = cA(x) + dB(x)$$

Γραμμική ιδιότητα

- Η ΓΣ της ακολουθίας $4^n + 9 \cdot 2^n$ είναι η:
$\dfrac{1}{1-4x} + \dfrac{9}{1-2x} = \dfrac{10-38x}{1-6x+8x^2}$.
- Αντίστροφα, η ακολουθία με ΓΣ $\dfrac{9-47x}{1-10x+21x^2}$ προκύπτει αν αναλύσουμε τη ΓΣ σε μερικά κλάσματα
$\dfrac{5}{1-3x} + \dfrac{4}{1-7x}$. Η ακολουθία είναι η $5 \cdot 3^n + 4 \cdot 7^n$.

Ιδιότητα κλίμακας

Η ακολουθία $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ έχει γεννήτρια συνάρτηση την $A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^r$.

Η ΓΣ της ακολουθίας $b_r = \lambda^r \alpha_r$ είναι η $A(\lambda x)$. Γιατί;

$$B(x) = \lambda^0 \alpha_0 x^0 + \lambda^1 \alpha_1 x^1 + \lambda^2 \alpha_2 x^2 + ... + \lambda^r \alpha_r x^r + ... =$$

$$\alpha_0 \lambda^0 x^0 + \alpha_1 \lambda^1 x^1 + \alpha_2 \lambda^2 x^2 + ... + \alpha_r \lambda^r x^r + ... =$$

$$\alpha_0 (\lambda x)^0 + \alpha_1 (\lambda x)^1 + \alpha_2 (\lambda x)^2 + ... + \alpha_r (\lambda x)^r + ... =$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r (\lambda x)^r = A(\lambda x)$$

Ιδιότητα ολίσθησης

Η ακολουθία $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ έχει γεννήτρια συνάρτηση την $A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^r$.

Η ΓΣ της ακολουθίας:

$b_r = 0$ για $r = 0, ..., n-1$ και

$b_r = \alpha_{r-n}$ για $r = n, n+1, ...$

είναι η $B(x) = x^n A(x)$. Γιατί;

$$B(x) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r = \sum_{r=0}^{n-1} b_r x^r + \sum_{r=n}^{\infty} b_r x^r = 0 + \sum_{r=n}^{\infty} \alpha_{r-n} x^r$$

Θέτουμε $r - n = k$, οπότε:

$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^{n+k} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k x^n = x^n \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k = x^n A(x)$$

Ιδιότητα ολίσθησης

- Η ακολουθία 0,0,0,0,1,1,1,1,... προκύπτει από την 1,1,1,1,... αν την ολισθήσουμε προς τα δεξιά κατά 4 θέσεις:
  0,0,0,0,1,1,1,1,...
  Οπότε, η ΓΣ της ακολουθίας 0,0,0,0,1,1,1,1,... είναι
  $x^4 A(x) = x^4 \frac{1}{1-x} = \frac{x^4}{1-x}$
- Η ακολουθία 0,0,1,2,4,8,...,2^n,... προκύπτει από την 1,2,4,8,...,2^n,... αν την ολισθήσουμε προς τα δεξιά κατά 2 θέσεις: 0,0,1,2,4,8,...,2^n,...
  Οπότε, η ΓΣ της ακολουθίας 0,0,1,2,4,8,...,2^n,... είναι
  $x^2 A(x) = x^2 \frac{1}{1-2x} = \frac{x^2}{1-2x}$

Βρείτε τη διακριτή αριθμητική συνάρτηση, που αντιστ στη γεννήτρια συνάρτηση: $A(z) = \dfrac{z^5}{5 - 6z + z^2}$.

- Η γεννήτρια συνάρτηση $A(z)$ ισούται με $z^5 B(z)$, όπου $B(z) = \dfrac{1}{5 - 6z + z^2}$.
- Αν βρούμε την αριθμητική συνάρτηση b_n, που αντιστοιχεί στη γεννήτρια συνάρτηση $B(z)$, η αριθμητική συνάρτηση α_n, που αντιστοιχεί στη γεννήτρια συνάρτηση $A(z)$ θα είναι η: $\alpha_n = S^5 b_n$.
- $B(z) = \dfrac{1}{5 - 6z + z^2} = \dfrac{1}{(5 - z)(1 + z)} =$
  $-\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{5 - z} + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{1 - z} = -\dfrac{1}{20} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{1}{5}z} + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{1 - z}$

Βρείτε τη διακριτή αριθμητική συνάρτηση, που αντιστ στη γεννήτρια συνάρτηση: $A(z) = \dfrac{z^5}{5-6z+z^2}$.

- $B(z) = \dfrac{1}{5-6z+z^2} = \dfrac{1}{(5-z)(1+z)} =$
  $-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{5-z} + \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1-z} = -\dfrac{1}{20}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{5}z} + \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1-z}$
- Η γεννήτρια συνάρτηση $\frac{1}{1-\frac{1}{5}z}$ αντιστοιχεί στην αριθμητική συνάρτηση $\left(\frac{1}{5}\right)^n, n \geq 0$.
- Η γεννήτρια συνάρτηση $\frac{1}{1-z}$ αντιστοιχεί στην (σταθερή) αριθμητική συνάρτηση 1.
- Άρα: $b_n = -\frac{1}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{4}, n \geq 0$
- Επομένως: $\alpha_n = \begin{cases} 0, & 0 \leq n \leq 4, \\ -\frac{1}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-5} + \frac{1}{4}, & n \geq 5. \end{cases}$

Ιδιότητα μερικών αθροισμάτων

Η ακολουθία $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ έχει γεννήτρια συνάρτηση την $A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^r$.

Η ΓΣ της ακολουθίας $b_k = \sum_{r=0}^{k} \alpha_r, k = 0, 1, 2, ...$ είναι

$B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$. Γιατί;

$$\alpha_k = b_k - b_{k-1} \underset{\text{γραμμική ιδιότητα}}{\Longrightarrow}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} b_{k-1} x^k \underset{\text{ιδιότητα ολίσθησης}}{\Longrightarrow}$$

$$A(x) = B(x) - xB(x) \Rightarrow B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$$

Ιδιότητα μερικών αθροισμάτων

- Η ακολουθία $\gamma_n = n + 1$ μπορεί να θεωρηθεί σαν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\alpha_n = 1$: $\gamma_n = 1, 1+1, 1+1+1, \ldots$
- Η ΓΣ της $\alpha_n = 1$ είναι η $A(x) = \frac{1}{1-x}$
- Οπότε η ΓΣ της $\gamma_n = n + 1$ θα είναι η $\frac{A(x)}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$
- Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ολίσθησης, έχουμε ότι η ΓΣ της ακολουθίας $\gamma_{n-1} = n$ είναι η $x\Gamma(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$
- Χρησιμοποιώντας ξανά την ιδιότητα των μερικών αθροισμάτων, έχουμε ότι η ακολουθία $\delta_n = \sum_{i=0}^{n} i$ έχει σα ΓΣ τη $\Delta(x) = \frac{x}{(1-x)^3}$

Να υπολογιστεί κλειστός τύπος για το άθροισμα $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, με χρήση γεννητριών συναρτήσεων. Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\alpha_k = k^2$.

Ιδέα:

- Βρίσκω πρώτα τη γεννήτρια συνάρτηση $A(x)$ της ακολουθίας $\alpha_k = k^2$
- Παρατηρώ ότι το ζητούμενο άθροισμα είναι ο n-στός όρος της ακολουθίας $b_k = \sum_{r=0}^{k} \alpha_r, k = 0, 1, 2, \ldots$ των μερικών αθροισμάτων της $\alpha_k = k^2$
- Η γεννήτρια συνάρτηση της b_k είναι $B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$ (έχει αποδειχθεί η σχετική ιδιότητα)
- Οπότε, το ζητούμενο άθροισμα ισούται με το συντελεστή του x^n στη γεννήτρια συνάρτηση $B(x)$.

Να υπολογιστεί κλειστός τύπος για το άθροισμα $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$, με χρήση γεννητριών συναρτήσεων. Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\alpha_k = k^2$.

Για τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\alpha_k = k^2$ έχουμε:

$$A(x) = 0 + 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + ... =$$

$$x(1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + ...) = x(x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + ...)' =$$

$$x\left[x(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...)\right]' = x\left[x(x + x^2 + x^3 + x^4 ...)'\right]' =$$

$$x\left[x\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)'\right]' = x\left[x\frac{x}{(1-x)^2}\right]' = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

Να υπολογιστεί κλειστός τύπος για το άθροισμα $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$, με χρήση γεννητριών συναρτήσεων. Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\alpha_k = k^2$.

Από την ιδιότητα των μερικών αθροισμάτων προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας: $b = 0^2, 0^2 + 1^2, 0^2 + 1^2 + 2^2, ..., 0^2 + 1^2 + ... + r^2, ...$, για την οποία είναι $b_k = \sum_{r=0}^{k} \alpha_r$ είναι η $S(x) = \frac{A(x)}{1-x} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$

Οπότε, για να υπολογίσουμε το ζητούμενο άθροισμα, πρέπει να υπολογίσουμε το συντελεστή του x^r στην παραπάνω συνάρτηση. Από το διωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε για το συντελεστή του x^r στο $(1-x)^{-4}$:

$$\frac{(-4)(-4-1)...(-4-r+1)}{r!}(-1)^r = \frac{4 \cdot 5 \cdot ... \cdot (r+3)}{r!}$$

$$= \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Να υπολογιστεί κλειστός τύπος για το άθροισμα $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, με χρήση γεννητριών συναρτήσεων. Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\alpha_k = k^2$.

Πώς μπορούμε να έχουμε x^r στη δική μας παράσταση; Είτε σαν $x^r = x^1 \cdot x^{r-1}$ είτε σαν $x^r = x^2 \cdot x^{r-2}$

Οπότε, ο συντελεστής του x^r στη συνάρτηση $S(x) = \dfrac{x(1+x)}{(1-x)^4}$ είναι ο:

$$\frac{r(r+1)(r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(r-1)r(r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}$$

Άρα: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + r^2 = \dfrac{r(r+1)(2r+1)}{6}$

Ιδιότητα συμπληρωματικών μερικών αθροισμάτων

Η ακολουθία $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ έχει γεννήτρια συνάρτηση την $A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^r$.

Η ΓΣ της ακολουθίας $b_k = \sum_{r=k}^{\infty} \alpha_r, k = 0, 1, 2, ...$ είναι $B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1-x}$. Γιατί;

$$b_k = \sum_{r=k}^{\infty} \alpha_r = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r - \sum_{r=0}^{k-1} \alpha_r \Rightarrow$$

$$b_k = A(1) - \sum_{r=0}^{k-1} \alpha_r \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} A(1)x^k - \sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{r=0}^{k-1} \alpha_r)x^k =$$

$$A(1)\sum_{k=0}^{\infty} x^k - x\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{r=0}^{k-1} \alpha_r)x^{k-1} \Rightarrow$$

$$B(x) = A(1)\frac{1}{1-x} - \frac{xA(x)}{1-x} = \frac{A(1) - xA(x)}{1-x}$$

Ιδιότητα παραγώγου

- Η ακολουθία: $\gamma_n = n\alpha_n$ έχει ΓΣ τη $\Gamma(x) = xA'(x)$, όπου $A'(x)$ είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $A(x)$.
- ΓΙΑΤΙ;

$$\Gamma(x) = xA'(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n x^n)' = x\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n\alpha_n)x^n$$

Ιδιότητα ολοκληρώματος

- Η ακολουθία: $\delta_n = \frac{\alpha_n}{n+1}$ έχει ΓΣ τη $\Delta(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(z)dz$.
- Η παράγουσα του z^n είναι $\frac{z^{n+1}}{n+1}$, οπότε έχουμε:

$$\Delta(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(z)dz = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \alpha_n z^n dz =$$

$$\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n+1}x^n$$

Να υπολογιστεί η ΓΣ της ακολουθίας $\alpha_n = n(n+1)$.

- Η ακολουθία $\beta_n = n$ έχει ΓΣ τη $B(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ (όπως δείξαμε σε προηγούμενη άσκηση).
- Από την ιδιότητα της παραγώγου, η $\gamma_n = n^2 = nb_n$ έχει ΓΣ $\Gamma(x) = xB'(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$.
- Από τη γραμμική ιδιότητα, η ακολουθία: $\alpha_n = n(n+1) = n^2 + n$ έχει ΓΣ τη

$$\Gamma(x) + B(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

Ιδιότητα συνέλιξης

- Έστω ακολουθία α με όρους: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots$
- Έστω ακολουθία β με όρους: $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$
- Η συνέλιξή τους είναι η ακολουθία με όρους:
- $\gamma_0 = \alpha_0 \cdot b_0$
- $\gamma_1 = \alpha_0 \cdot b_1 + \alpha_1 \cdot b_0$
- $\gamma_2 = \alpha_0 \cdot b_2 + \alpha_1 \cdot b_1 + \alpha_2 \cdot b_0$
- $\gamma_3 = \alpha_0 \cdot b_3 + \alpha_1 \cdot b_2 + \alpha_2 \cdot b_1 + \alpha_3 \cdot b_0$
- $\ldots$
- ΔΗΛΑΔΗ: Συνέλιξη των ακολουθιών α και β είναι η ακολουθία: $d_k = \sum_{r=0}^{k} \alpha_r \beta_{k-r}, k = 0, 1, 2, \ldots$

Ιδιότητα συνέλιξης

Η ακολουθία $d_k = \sum_{r=0}^{k} \alpha_r \beta_{k-r}, k = 0, 1, 2, ...$ ονομάζεται συνέλιξη των ακολουθιών α και β και συμβολίζεται $\alpha * \beta$.
Η ΓΣ της ακολουθίας d_k είναι η $D(x) = A(x)B(x)$, όπου $A(x)$ είναι η ΓΣ της ακολουθίας α_r και $B(x)$ είναι η ΓΣ της ακολουθίας b_r. Γιατί;

$$A(x)B(x) = (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ...)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ...) =$$
$$(\alpha_0 b_0) + (\alpha_0 b_1)x + (\alpha_0 b_2)x^2 + ...(\alpha_1 b_0)x + (\alpha_1 b_1)x^2 + (\alpha_1 b_2)x^3 +$$
$$... + (\alpha_2 b_0)x^2 + (\alpha_2 b_1)x^3 + (\alpha_2 b_2)x^4 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k = D(x)$$

Ιδιότητα συνέλιξης

- Η ακολουθία $\gamma_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_{n-1}$ ονομάζεται συνέλιξη των ακολουθιών α και β και συμβολίζεται $\alpha * \beta$.
- Έστω $\Gamma(x)$ η ΓΣ της ακολουθίας γ. Είναι $\Gamma(x) = A(x)B(x)$ ή πιο απλά η ΓΣ της συνέλιξης δύο ακολουθιών δίνεται από το γινόμενο των ΓΣ τους.
- Αυτό προκύπτει εύκολα από τον ορισμό του γινομένου πολυωνύμων: ο συνετελεστής του x^n στο γινόμενο $A(x)B(x)$ ισούται με $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \beta_{n-i}$, επειδή όλοι οι δυνατοί τρόποι να πάρουμε το x^n στο γινόμενο προκύπτουν πολλαπλασιάζοντας το x^i στο $A(x)$ με το x^{n-i} στο $B(x)$, για όλα τα $i = 0, ..., n$.

Αποδείξτε ότι η πράξη της συνέλιξης είναι πράξη αντιμεταθετική, δηλ., ότι για οποιεσδήποτε ακολουθίες α και β ισχύει ότι $\alpha * \beta = \beta * \alpha$.

- Το γινόμενο πολυωνύμων είναι αντιμεταθετική πράξη.
- Από την ιδιότητα της συνέλιξης, οι ακολουθίες $\alpha * \beta$ και $\beta * \alpha$ έχουν την ίδια ΓΣ.
- Άρα, πρόκειται για τις ίδιες ακολουθίες.

Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{i=0}^{n} 3^i 2^{n-i}$, χρησιμοποιώντ γεννήτριες συναρτήσεις.

- Το ζητούμενο άθροισμα είναι ο n-οστός όρος της συνέλιξης των ακολουθιών $\alpha_n = 3^n$ και $\beta_n = 2^n$.
- Η α_n έχει ΓΣ $\frac{1}{1-3x}$ και η β_n έχει ΓΣ $B(x) = \frac{1}{1-2x}$.
- Η ΓΣ της συνέλιξής τους είναι:

$$\frac{1}{(1-3x)(1-2x)} = \frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x}$$

  Αυτό προκύπτει με μερική κλασματική ανάλυση.
- Από τη γραμμική ιδιότητα, η ακολουθία, που αντιστοιχεί σε αυτή τη ΓΣ έχει n-οστό όρο $3^{n+1} - 2^{n+1}$.
- Επομένως, $\sum_{i=0}^{n} 3^i 2^{n-i} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

Ανάλυση σε κλάσματα και αντιστροφή γεννητριών συναρτήσεων

- Θέλουμε να υπολογίσουμε την ακολουθία με γεννήτρια συνάρτηση $\dfrac{P(x)}{D(x)}$, όπου $P(x)$ και $D(x)$ είναι πολυώνυμα ως προς x.
- Εφαρμόζουμε μερική κλασματική ανάλυση είτε απευθείας στη συνάρτηση $\dfrac{P(x)}{D(x)}$ είτε στη συνάρτηση $\dfrac{1}{D(x)}$.
- Από το αποτέλεσμα της ανάλυσης σε μερικά κλάσματα υπολογίζουμε την ακολουθία με την αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση.
- Αν έχουμε την $\dfrac{1}{D(x)}$ χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της ολίσθησης και τη γραμμική ιδιότητα.

Να υπολογιστεί η ακολουθία με γεννήτρια συνάρτησr $\dfrac{2}{1-4x^2}$

- Με κλασματική ανάλυση: $\dfrac{2}{1-4x^2} = \dfrac{1}{1-2x} + \dfrac{1}{1+2x}$
- Για τη γεννήτρια συνάρτηση $\dfrac{1}{1-2x}$ η ακολουθία είναι η $\beta_n = 2^n$.
- Για τη γεννήτρια συνάρτηση $\dfrac{1}{1+2x}$ η ακολουθία είναι η $\gamma_n = (-2)^n$.
- Από τη γραμμική ιδιότητα η ζητούμενη ακολουθία είναι:
  $\alpha_n = \begin{cases} 2^{n+1}, & \text{αν } n \text{ άρτιος,} \\ 0, & \text{αν } n \text{ περιττός.} \end{cases}$