Διακριτά Μαθηματικά

Φροντιστήριο

Γεννήτριες Συναρτήσεις ΙΙ

Να υπολογιστεί η ακολουθία με γεννήτρια συνάρτηση $\dfrac{1+2x-x^2-x^3}{1+x-x^2-x^3}$

Να υπολογιστεί η ακολουθία με γεννήτρια συνάρτηση $\dfrac{1+2x-x^2-x^3}{1+x-x^2-x^3}$

- $A(x) = \dfrac{1+x-x^2-x^3}{1+x-x^2-x^3} + \dfrac{x}{1+x-x^2-x^3} = 1 + \dfrac{x}{1+x-x^2(1+x)} = 1 + \dfrac{x}{(1+x)(1-x^2)} = 1 + \dfrac{x}{(1+x)^2(1-x)}$
- Αναλύουμε το κλάσμα $\frac{x}{(1+x)^2(1-x)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων (το πώς στις επόμενες διαφάνειες).

Να υπολογιστεί η ακολουθία με γεννήτρια συνάρτηση $\dfrac{1+2x-x^2-x^3}{1+x-x^2-x^3}$

- Έχουμε: $A(x) = 1 + \frac{1}{4}(1-x)^{-1} + \frac{1}{4}(1+x)^{-1} - \frac{1}{2}(1+x)^{-2} =$
  $1 + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}(-1)^k x^k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}x^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}x^k =$
  $1 + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}x^k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)x^k =$
  $1 + \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^k - \frac{1}{2}(-1)^k(k+1)\right]x^k =$
  $1 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + 3x^5 - 3x^6 + \dots$

Ανάλυση σε άθροισμα απλών κλασμάτων

$$\frac{x}{(1+x)^2(1-x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{(1+x)^2} \Longleftrightarrow$$

$$x = A(1+x)^2 + B(1-x)(1+x) + C(1-x) \qquad (1)$$

- Για $x = 1 \overbrace{\Longrightarrow}^{(1)} 1 = A \cdot 2^2 \Longrightarrow \boxed{A = \frac{1}{4}}$. Αντικαθιστούμε στην (1):

$$x - \frac{1}{4}(1+x)^2 = B(1-x)(1+x) + C(1-x) \qquad (2)$$

- Για $x = -1 \overset{(2)}{\overbrace{\Longrightarrow}} -1 = C \cdot 2 \Longrightarrow \boxed{C = -\frac{1}{2}}$. Αντικαθιστούμε στην (2): $x - \frac{1}{4}(1+x)^2 + \frac{1}{2}(1-x) = B(1-x^2)$.
  Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη $\Longrightarrow$

$$1 - \frac{2}{4}(1+x) - \frac{1}{2} = -2Bx \tag{3}$$

- Για $x = 1 \overset{(3)}{\overbrace{\Longrightarrow}} 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} = -2B \Longrightarrow -\frac{1}{2} = -2B \Longrightarrow$
  $\boxed{B = \frac{1}{4}}$

Με πόσους τρόπους μπορεί κάποιος να μοιράσει 24 (ί αντικείμενα σε 4 άτομα, έτσι ώστε κάθε άτομο να πάρει τουλάχιστον 3 και όχι παραπάνω από 8 αντικείμενα;

Με πόσους τρόπους μπορεί κάποιος να μοιράσει 24 (ί αντικείμενα σε 4 άτομα, έτσι ώστε κάθε άτομο να πάρει τουλάχιστον 3 και όχι παραπάνω από 8 αντικείμενα;

- Για κάθε άτομο η ΓΣ είναι: $x^3 + x^4 + \ldots + x^8$, οπότε και για τα 4 άτομα η ΓΣ είναι: $(x^3 + x^4 + \ldots + x^8)^4$. Το πλήθος των ζητούμενων τρόπων δίνεται από το συντελεστή του x^{24} στο ανάπτυγμα της παραπάνω ΓΣ.

- $(x^3+x^4+\ldots+x^8)^4 = x^{12}(1+x+x^2+\ldots+x^5)^4 = x^{12}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4$

Με πόσους τρόπους μπορεί κάποιος να μοιράσει 24 (ί αντικείμενα σε 4 άτομα, έτσι ώστε κάθε άτομο να πάρει τουλάχιστον 3 και όχι παραπάνω από 8 αντικείμενα;

- Άρα, αναζητούμε το συντελεστή του x^{12} στο ανάπτυγμα του: $\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4 = (1-x^6)^4(1-x)^{-4} =$
  $[1-\binom{4}{1}x^6+\binom{4}{2}x^{12}-\ldots+x^{24}][\binom{-4}{0}+\binom{-4}{1}(-x)+\binom{-4}{2}(-x)^2+\ldots]$
  Ο συντελεστής του x^{12} είναι:

$$\left[\binom{-4}{12}(-1)^{12}-\binom{4}{1}\binom{-4}{6}(-1)^6+\binom{4}{2}\binom{-4}{0}\right]=$$

$$\left[\binom{15}{12}-\binom{4}{1}\binom{9}{6}+\binom{4}{2}\right]=125$$

Να βρεθεί η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για τον αρ α_r των διαφορετικών μεταθέσεων r αντικειμένων, που επιλέγονται από 4 διαφορετικούς τύπους αντικειμένων, εκ των οποίων τα αντικείμενα κάθε τύπου επιλέγονται τουλάχιστον 2 και όχι περισσότερες από 5 φορές.

Να βρεθεί η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για τον αρ α_r των διαφορετικών μεταθέσεων r αντικειμένων, που επιλέγονται από 4 διαφορετικούς τύπους αντικειμένων, εκ των οποίων τα αντικείμενα κάθε τύπου επιλέγονται τουλάχιστον 2 και όχι περισσότερες από 5 φορές.

- Η ΓΣ για κάθε αντικείμενο κάθε τύπου είναι:
  $$\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$
- Η ΓΣ για τους 4 τύπους αντικειμένων είναι:
  $$\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right)^4$$
- Ο ζητούμενος αριθμός α_r δίνεται από το συντελεστή του $\dfrac{x^r}{r!}$ στο ανάπτυγμα της παραπάνω συνάρτησης.

Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων να ρίξουμε k διακεκριμένα αντικείμενα σε n διακεκριμένες υποδοχές, έτσι ώστε κάθε υποδοχή να δεχθεί τουλάχιστον ένα αντικείμενο.

Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων να ρίξουμε k διακεκριμένα αντικείμενα σε n διακεκριμένες υποδοχές, έτσι ώστε κάθε υποδοχή να δεχθεί τουλάχιστον ένα αντικείμενο.

Σε κάθε υποδοχή πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα αντικείμενο και μετράει η σειρά.

- Η ΓΣ για κάθε υποδοχή είναι: $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = e^x - 1$.
- Η ΓΣ για όλες τις n υποδοχές είναι:

$$(e^x - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (e^x)^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k e^{x(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \sum_{r=0}^{\infty} (n-k)^r \frac{x^r}{r!} =$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)^r \right) \frac{x^r}{r!}$$