Διακριτά Μαθηματικά

Φροντιστήριο

Γεννήτριες Συναρτήσεις III

Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_r = \binom{2r}{r}$ $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Στη συνέχεια, σαν εφαρμογή του πιο πάνω, να υπολογισθεί το άθροισμα: $\sum_{i=0}^{t} \binom{2i}{i}\binom{2t-2i}{t-i}$

Από το Δυωνυμικό Θεώρημα έχουμε:

$$(1+x)^n = 1 + \sum_{r=1} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} x^r$$

Άρα:

$$
\begin{aligned}
(1-4x)^{-\frac{1}{2}} &= 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-r+1)}{r!}(-4x)^r \\
&= 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{4^r(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})(\frac{5}{2})\dots(\frac{2r-1}{2})}{r!}x^r \\
&= 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2^r\left[1\times 3\times 5\times\dots\times(2r-1)\right]}{r!}x^r \\
&= 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\boxed{2^r r!}\left[1\times 3\times 5\times\dots\times(2r-1)\right]}{r!r!}x^r \\
&= 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\boxed{(2\times 4\times 6\times\dots\times 2r)}\left[1\times 3\times 5\times\dots\times(2r-1)\right]}{r!r!}x^r \\
&= 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(2r)!}{r!r!}x^r \\
&= 1+\sum_{r=1}^{\infty}\binom{2r}{r}x^r
\end{aligned}
$$

Αφού, $\binom{2i}{i}$ είναι ο συντελεστής του όρου x^i στο $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ και $\binom{2t-2i}{t-i}$ είναι ο συντελεστής του όρου x^{t-i} στο $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$
τότε:
$\sum_{i=0}^{t} \binom{2i}{i}\binom{2t-2i}{t-i}$ είναι ο συντελεστής του όρου x^t
στο $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = (1-4x)^{-1} =$
$1 + 4x + (4x)^2 + (4x)^3 + \ldots + (4x)^r + \ldots$

Επομένως, έχουμε: $\sum_{i=0}^{t} \binom{2i}{i} \binom{2t-2i}{t-i} = 4^t$

Αποδείξτε την ιδιότητα των μερικών αθροισμάτων χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης.

Αποδείξτε την ιδιότητα των μερικών αθροισμάτων χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης.

- Η συνέλιξη της ακολουθίας α με την ακολουθία $\beta_n = 1$ είναι $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i$, δηλ., η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της α.
- Έστω $A(x)$ η ΓΣ της α.
- Η ΓΣ της $\beta_n = 1$ είναι $B(x) = (1-x)^{-1}$.
- Από την ιδιότητα της συνέλιξης, η ΓΣ της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων της α είναι $\frac{A(x)}{1-x}$.

Να υπολογιστεί η ακολουθία με γεννήτρια συνάρτηση την: $F(x) = \dfrac{4x^2(1-8x)}{(1-4x)(1-2x)^2}$

Να υπολογιστεί η ακολουθία με γεννήτρια συνάρτηση την: $F(x) = \dfrac{4x^2(1-8x)}{(1-4x)(1-2x)^2}$

- Βρίσκουμε πρώτα τη ΓΣ του παράγοντα:
  $G(x) = \dfrac{1-8x}{(1-4x)(1-2x)^2}$
- Με κλασματική ανάλυση:
  $G(x) = \dfrac{1-8x}{(1-4x)(1-2x)^2} = \dfrac{-4}{(1-4x)} + \dfrac{3}{(1-2x)^2} + \dfrac{2}{(1-2x)}$

Να υπολογιστεί η ακολουθία με γεννήτρια συνάρτηση την: $F(x) = \dfrac{4x^2(1-8x)}{(1-4x)(1-2x)^2}$

- Βρίσκουμε πρώτα τη ΓΣ του παράγοντα: $G(x) = \dfrac{1-8x}{(1-4x)(1-2x)^2}$
- Με κλασματική ανάλυση: $G(x) = \dfrac{1-8x}{(1-4x)(1-2x)^2} = \dfrac{-4}{(1-4x)} + \dfrac{3}{(1-2x)^2} + \dfrac{2}{(1-2x)}$
- Η ακολουθία, που αντιστοιχεί στη γεννήτρια συνάρτηση $G(x)$, είναι η:

$$\alpha_r = -4 \cdot 4^r + 3 \cdot (r+1)2^r + 2 \cdot 2^r, r = 0, 1, 2, \ldots$$

Να υπολογιστεί η ακολουθία με γεννήτρια συνάρτηση την: $F(x) = \dfrac{4x^2(1-8x)}{(1-4x)(1-2x)^2}$

- Βρίσκουμε πρώτα τη ΓΣ του παράγοντα:
  $G(x) = \dfrac{1-8x}{(1-4x)(1-2x)^2}$
- Με κλασματική ανάλυση:
  $G(x) = \dfrac{1-8x}{(1-4x)(1-2x)^2} = \dfrac{-4}{(1-4x)} + \dfrac{3}{(1-2x)^2} + \dfrac{2}{(1-2x)}$
- Η ακολουθία, που αντιστοιχεί στη γεννήτρια συνάρτηση $G(x)$, είναι η:

$$\alpha_r = -4 \cdot 4^r + 3 \cdot (r+1)2^r + 2 \cdot 2^r, r = 0, 1, 2, \ldots$$

- Επομένως, η $F(x) = 4x^2 G(x)$ (με βάση ιδιότητα ολίσθησης) είναι η ΓΣ της ακολουθίας $4\alpha_{r-2}$,
  δηλ.: $\alpha_r = \begin{cases} (3r-1)2^r - 4^r, & \text{αν } r = 2, 3, 4, \ldots, \\ 0, & \text{αν } r < 2. \end{cases}$

Να υπολογιστεί η ακολουθία με γεννήτρια συνάρτηση την: $F(x) = \dfrac{4x^2(1-8x)}{(1-4x)(1-2x)^2}$

Να υπολογιστεί η ακολουθία με γεννήτρια συνάρτηση την: $F(x) = \dfrac{4x^2(1-8x)}{(1-4x)(1-2x)^2}$

- Γιατί, η $\dfrac{1}{(1-2x)^2}$ είναι γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $(r+1)2^r$;
- Αναπτύσσω το $\dfrac{1}{(1-2x)^2}$ και αναζητώ το συντελεστή του x^k, που θα δώσει το γενικό όρο της ζητούμενης ακολουθίας:
- $\dfrac{1}{(1-2x)^2} = (1-2x)^{-2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} (-2x)^k =$
$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2-1}{k} (-1)^k (-1)^k 2^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{k} 2^k x^k =$
$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)2^k x^k$

Με χρήση γεννητριών συναρτήσεων, να αποδείξετε πο $\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$

Με χρήση γεννητριών συναρτήσεων, να αποδείξετε π $\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$

- Παρατηρούμε ότι το άθροισμα αποτελεί συνέλιξη των ακολουθιών $x_k = \binom{r}{k}$ και $y_k = \binom{s}{k}$. Όμως, η ακολουθία $x_k = \binom{r}{k}$ έχει γεννήτρια συνάρτηση την $(1+z)^r$, ενώ η $y_k = \binom{s}{k}$ έχει γεννήτρια συνάρτηση την $(1+z)^s$. Σύμφωνα με την ιδιότητα της συνέλιξης, η γεννήτρια συνάρτηση της

$$(\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k})$$

είναι η $(1+z)^{r+s}$ οπότε το παραπάνω άθροισμα, που παριστά τον ν-οστό όρο της ακολουθίας θα ισούται με τον συντελεστή του z^n στην προηγούμενη γεννήτρια συνάρτηση. Δηλαδή έχουμε,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

Για δοσμένο t να υπολογιστεί το άθροισμα, $\sum_{i=0}^{t} \binom{2i}{i} \binom{2t-2i}{t-i}$

Για δοσμένο t να υπολογιστεί το άθροισμα, $\sum_{i=0}^{t}\binom{2i}{i}\binom{2t-2i}{t-i}$

- Έστω $\alpha_i = \binom{2i}{i}$. Τότε $b_i = \binom{2t-2i}{t-i} = \alpha_{t-i}$, οπότε είναι,

$$d(t) = \sum_{i=0}^{t}\binom{2i}{i}\binom{2t-2i}{t-i} = \alpha_i * b_i = \alpha_i * \alpha_{t-i}$$

και έτσι, η γεννήτρια συνάρτηση της d_i είναι σύμφωνα με την ιδιότητα της συνέλιξης $D(x) = [A(x)]^2$.

Για δοσμένο t να υπολογιστεί το άθροισμα: $\sum_{i=0}^{t} \binom{2i}{i}\binom{2t-2i}{t-i}$

- Όμως, η ακολουθία: $\alpha_k = \binom{2k}{k}$ έχει ΓΣ την

$$A(x) = (1-4x)^{-\frac{1}{2}}$$

Έτσι,

$$D(x) = [A(x)]^2 = [(1-4x)^{-\frac{1}{2}}]^2 = (1-4x)^{-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k}(-1)^k 4^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 4^k x^k$$

Άρα,

$$\sum_{i=0}^{t} \binom{2i}{i}\binom{2t-2i}{t-i} = 4^t$$

Βρείτε μια απλή έκφραση για τη γεννήτρια συνάρτηση της αριθμητικής ακολουθίας $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots$.

Βρείτε μια απλή έκφραση για τη γεννήτρια συνάρτηση της αριθμητικής ακολουθίας $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots$.

Έστω $A(z)$ η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας. Η ακολουθία ορίζεται από την αναδρομική σχέση:

$$\alpha_n = \alpha_{n-2} + 1, n \geq 2$$

με συνοριακές συνθήκες $\alpha_0 = \alpha 1 = 1$. Πολλαπλασιάζοντας με z^n και αθροίζοντας για όλα τα $n \geq 2$ έχουμε:

$$\alpha_n = \alpha_{n-2} + 1 \Rightarrow \alpha_n z^n = \alpha_{n-2} z^n + z^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n z^n = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_{n-2} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} z^n \Rightarrow$$

$$A(z) - \alpha_0 - \alpha_1 z = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n - 1 - z \Rightarrow$$

Βρείτε μια απλή έκφραση για τη γεννήτρια συνάρτηση της αριθμητικής ακολουθίας $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots$.

$$A(z) - 1 - z = z^2 A(z) + \frac{1}{1-z} - 1 - z \Rightarrow$$

$$(1 - z^2)A(z) = \frac{1}{1-z} \Rightarrow$$

$$A(z) = \frac{1}{(1-z^2)(1-z)} = \frac{1}{(1+z)(1-z)^2}$$

- Άρα, η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας δίνεται από τη σχέση:

$$A(z) = \frac{1}{(1+z)(1-z)^2}$$

Χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις, υπολογίστε πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν τα 52 (διακεκριμένα) χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 (διακεκριμένους) παίκτες, όταν κάθε παίκτης πρέπει να πάρει τουλάχιστον ένα χαρτί.

Τα χαρτιά είναι διαφορετικά, οπότε μας ενδιαφέρει η σειρά (όχι με την έννοια ότι μας ενδιαφέρει η σειρά, που μοιράζονται τα χαρτιά, αλλά με την έννοια ότι μας επιβάλλουν μία διάταξη στους παίκτες). Άρα, πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι εκθετικές γεννήτριες συναρτησεις μιας και οι παίκτες και τα χαρτιά θεωρούνται διακεκριμένες οντότητες.

- Η ΓΣ για κάθε παίκτη είναι: $\frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = e^x - 1$ (κάθε παράγοντας στο γινόμενο εκφράζει τη δυνατότητα μοιράσματος ενός, δύο, τριών ή περισσοτερων χαρτιών σε κάθε ένα από τους τέσσερεις παίκτες).
  Σημείωση: Επειδή, τα χαρτιά είναι 52 και επειδή, κάθε παίκτης πρέπει να πάρει τουλάχιστον 1 χαρτί και κανένας παίκτης δεν μπορεί να πάρει περισσότερα από 49 χαρτιά, θα έπρεπε να σταματήσουμε το άθροισμα $\frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ στον όρο $\frac{x^{49}}{49!}$. Τότε όμως, το άθροισμα δε θα ισούται με $e^x - 1$. Επεκτείνοντας το άθροισμα στο άπειρο δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα, επειδή οι μεγαλύτερες δυνάμεις του x δεν επηρεάζουν το ζητούμενο συντελεστή.
- Άρα, η ΓΣ για όλους τους παίκτες είναι:
  $(e^x - 1)^4 = e^{4x} - 4e^{3x} + 6e^{2x} - 4e^x + 1$.
- Η απάντηση στην ερώτηση δίνεται από το συντελεστή του όρου $\frac{x^{52}}{52!}$, που είναι $4^{52} - 4 \cdot 3^{52} + 6 \cdot 2^{52} - 4$.