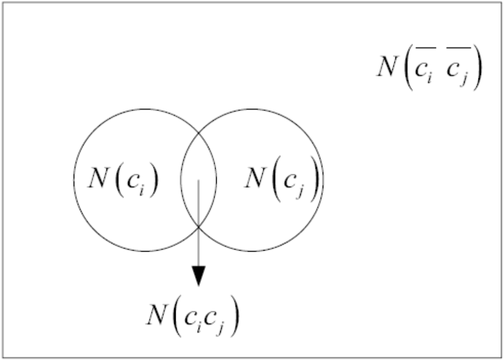
Η ύλη συνοπτικά...

- Στοιχειώδης συνδυαστική
- Γεννήτριες συναρτήσεις
- Σχέσεις αναδρομής
- Θεωρία Μέτρησης Polyá
- Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού

Εγκλεισμός - Αποκλεισμός

- Συνολο-θεωρητική μέθοδος μέτρησης:
- Έστω S σύνολο με πληθικό αριθμό N, $|S| = N$.
- $c_1, c_2, c_3, ... c_t$: συλλογή από συνθήκες, που ικανοποιούνται από μερικά ή από όλα τα στοιχεία του S.
- Κάποια στοιχεία στοιχεία του S μπορεί να ικανοποιούν παραπάνω από μία συνθήκες και άλλα καμία:
  - $N(c_i), 1 \leq i \leq t$: πλήθος στοιχείων του S, που ικανοποιούν τη συνθήκη c_i.
  - $N(\overline{c_i}), 1 \leq i \leq t$: πλήθος στοιχείων του S, που δεν ικανοποιούν τη συνθήκη c_i.
  - $N(c_i) + N(\overline{c_i}) = N = |S|$.
  - $N(c_i c_j), i, j \in \{1, 2, ..., t\}, i \neq j$: πλήθος στοιχείων του S, που ικανοποιούν και τις δύο συνθήκες c_i, c_j.
  - $N(\overline{c_i}\ \overline{c_j}), i, j \in \{1, 2, ..., t\}, i \neq j$: πλήθος στοιχείων του S που δεν ικανοποιούν καμία από τις δύο συνθήκες c_i, c_j.
  - $N(\overline{c_i}\ \overline{c_j}) = N - N(c_i) - N(c_j) + N(c_i c_j)$.

Εγκλεισμός - Αποκλεισμός



Σε μια τάξη υπάρχουν 100 άτομα, που παρακολουθο ένα μάθημα. Από αυτά, 30 άτομα έχουν το μάθημα σαν ``επιλογή''. Πόσα άτομα έχουν το μάθημα σαν ``υποχρεωτικό'';

- c_1: έχω το μάθημα σαν επιλογή.
- $N(c_1) = 30$: 30 μαθητές έχουν το μάθημα σαν επιλογή.
- $N(\overline{c_1}) = |S| - N(c_1) = 100 - 30 = 70$: 70 μαθητές έχουν το μάθημα σαν υποχρεωτικό.

Σε μια ομάδα υπάρχουν 100 άτομα από τα οποία 50 μιλάνε αγγλικά, 40 γαλλικά και 20 μιλάνε και τις 2 γλώσσες. Πόσα άτομα δε μιλάνε ούτε αγγλικά ούτε γαλλικά;

- $|S| = N = 100$.
- c_1: μιλάω αγγλικά, $N(c_1) = 50$.
- c_2: μιλάω γαλλικά, $N(c_2) = 40$.
- $c_1 c_2$: μιλάω αγγλικά και γαλλικά, $N(c_1 c_2) = 20$.
- $\overline{c_1}\,\overline{c_2}$: δε μιλάω ούτε αγγλικά ούτε γαλλικά, $N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}) = N - N(c_1) - N(c_2) + N(c_1 c_2) = 100 - 50 - 40 + 20 = 30$.

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (Principle of Inclusion Exclusion)

- Έστω S σύνολο με πληθικό αριθμό N, $|S| = N$.
- $c_1, c_2, c_3, \ldots c_t$: συλλογή από συνθήκες που ικανοποιούνται από μερικά ή από όλα τα στοιχεία του S.
- Το πλήθος των στοιχείων του S, που δεν ικανοποιούν καμία από τις συνθήκες είναι: $\overline{N} = N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \ldots \overline{c_t}) =$ $N - N(c_1) - N(c_2) - \ldots - N(c_t) + N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \ldots +$ $N(c_1c_t) + N(c_2c_3) + \ldots N(c_{t-1}c_t)$ $-N(c_1c_2c_3) - N(c_1c_2c_4) - \ldots - N(c_1c_2c_t) - N(c_1c_3c_4) - \ldots -$ $N(c_1c_3c_t) - N(c_{t-2}c_{t-1}c_t) + \ldots + (-1)^t N(c_1c_2c_3\ldots c_t) =$ $N - \sum_{1 \le i \le t} N(c_i) + \sum_{1 \le i < j \le t} N(c_ic_j) - \sum_{1 \le i < j < k \le t} N(c_ic_jc_k) +$ $\ldots + (-1)^t N(c_1c_2c_3\ldots c_t)$.

Συμπέρασμα: το πλήθος των στοιχείων του S, που ικανοποιούν τουλάχιστον μία από τις συνθήκες είναι $N - \overline{N}$.

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού: Απόδειξη

$$\overline{N} = N - \sum_{1 \leq i \leq t} N(c_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq t} N(c_i c_j) - \sum_{1 \leq i < j < k \leq t} N(c_i c_j c_k) +$$
$$\ldots + (-1)^t N(c_1 c_2 c_3 \ldots c_t)$$

- Προφανώς, γίνεται με επαγωγή στο t.
- Αλλά, γίνεται και με συνδυαστικά επιχειρήματα:
  - Αν το $x \in S$, δεν ικανοποιεί καμία συνθήκη μετριέται μια φορά στο $\overline{N}$ και μία φορά στο N και δε μετριέται σε κανέναν άλλον όρο.
  - Αν το $x \in S$, ικανοποιεί ακριβώς r από τις συνθήκες $(1 \leq r \leq t)$ δε μετριέται στο $\overline{N}$, αλλά μετριέται στο δεξί μέρος της σχέσης. Πόσες φορές;

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού: Απόδειξη

$$\overline{N} = N - \sum_{1 \leq i \leq t} N(c_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq t} N(c_i c_j) - \sum_{1 \leq i < j < k \leq t} N(c_i c_j c_k) +$$
$$\ldots + (-1)^t N(c_1 \ldots c_t)$$

1. 1 φορά στο N
2. r φορές στο $\sum_{1 \leq i \leq t} (c_i)$, μία για κάθε μία από τις r συνθήκες, που ικανοποιεί
3. $\binom{r}{2}$ φορές στο $\sum_{1 \leq i < j \leq t} (c_i c_j)$, μία για κάθε ζεύγος συνθηκών, που επιλέγεται από τις r συνθήκες, που ικανοποιεί
4. $\binom{r}{3}$ φορές στο $\sum_{1 \leq i < j < k \leq t} (c_i c_j c_k)$, μία για κάθε τριάδα συνθηκών, που επιλέγεται από τις r συνθήκες, που ικανοποιεί

   ...

$r+1$. $\binom{r}{r} = 1$ φορά στο $\sum (c_{i_1} c_{i_2} \ldots c_{i_r})$

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού: Απόδειξη

$$\overline{N} = N - \sum_{1 \leq i \leq t} N(c_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq t} N(c_i c_j) - \sum_{1 \leq i < j < k \leq t} N(c_i c_j c_k) +$$
$$\ldots + (-1)^t N(c_1 \ldots c_t)$$

- Άρα, στο δεξιό μέρος της σχέσης το x μετριέται: $1 - r + \binom{r}{2} - \binom{r}{3} + \ldots + (-1)^r \binom{r}{r} = [1 + (-1)]^r = 0^r = 0$ φορές.
- Αλλά, τα δύο μέρη της σχέσης μετρούν τα ίδια στοιχεία του S και επομένως η σχέση ικανοποιείται.

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού: Απόδειξη με επαγωγ

Παρατηρούμε τα εξής:

- $N(\overline{c_i}) = N - N(c_i)$
- $N(\overline{c_i}c_j) = N(c_j) - N(c_ic_j)$
- $N(\overline{c_i}\ \overline{c_j}) = N - N(c_i\overline{c_j}) - N(\overline{c_i}c_j) - N(c_ic_j) =$
  $N - [N(c_i\overline{c_j}) + N(c_ic_j)] - [N(\overline{c_i}c_j) + N(c_ic_j)] + N(c_ic_j) =$
  $N - N(c_i) - N(c_j) + N(c_ic_j)$
- Γενικεύοντας, θα αποδείξουμε ότι: $N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}...\overline{c_r}) =$
  $N - N(c_1) - N(c_2) - ... - N(c_r)$
  $+N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + ... + N(c_{r-1}c_r)$
  $-N(c_1c_2c_3) - N(c_1c_2c_4) - ... - N(c_{r-2}c_{r-1}c_r)$
  $+...$
  $+(-1)^rN(c_1c_2c_3...c_r) =$
  $N - \sum_i N(c_i) + \sum_{i,j;i\neq j} N(c_ic_j) - \sum_{i,j,k;i\neq j\neq k} N(c_ic_jc_k) + ... +$
  $(-1)^rN(c_1c_2...c_r)$

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού: Απόδειξη με επαγωγ

- Βασικό βήμα: Ισχύει για 1 ιδιότητα: $N(\overline{c_1}) = N - N(c_1)$
- Επαγωγική Υπόθεση: Έστω ότι ισχύει για $r-1$ ιδιότητες:
  $N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}...\overline{c_{r-1}}) =$
  $N - N(c_1) - N(c_2) - ... - N(c_{r-1})$
  $+N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + ... + N(c_{r-2}c_{r-1})$
  $-N(c_1c_2c_3) - N(c_1c_2c_4) - ... - N(c_{r-3}c_{r-2}c_{r-1})$
  $+... + (-1)^{r-1}N(c_1c_2c_3...c_{r-1})$
- Επαγωγικό βήμα: από N στοιχεία, που μπορούν να πληρούν μέχρι r ιδιότητες, ασχολούμαστε με εκείνα, που πληρούν την ιδιότητα r και μπορούν φυσικά να πληρούν κάθε μία από τις υπόλοιπες $r-1$ ιδιότητες. Ισχύει από την επαγωγική υπόθεση: $N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}...\overline{c_{r-1}}c_r) =$
  $N(c_r) - N(c_1c_r) - N(c_2c_r) - ... - N(c_{r-1}c_r)$
  $+N(c_1c_2c_r) + N(c_1c_3c_r) + ... + N(c_{r-2}c_{r-1}c_r)$
  $-N(c_1c_2c_3c_r) - N(c_1c_2c_4c_r) - ... - N(c_{r-3}c_{r-2}c_{r-1}c_r)$
  $+... + (-1)^{r-1}N(c_1c_2c_3...c_{r-1}c_r)$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο προηγούμενες ισότητες έχουμε:

- $N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}...\overline{c_{r-1}}) - N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}...\overline{c_{r-1}}c_r) =$
  $N - N(c_1) - N(c_2) - ... - N(c_{r-1}) - N(c_r)$
  $+N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + ... + N(c_1c_r) + ... + N(c_{r-1}c_r)$
  $-... + (-1)^r N(c_1c_2c_3...c_{r-1}c_r)$.
- Όμως: $N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}...\overline{c_{r-1}}) - N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}...\overline{c_{r-1}}c_r) = N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}...\overline{c_{r-1}}\,\overline{c_r})$.

Πόσες τοποθετήσεις των ψηφίων 0,1,2,...,9 υπάρχουν, οποίες το πρώτο ψηφίο να είναι μεγαλύτερο από το 1 και το τελευταίο ψηφίο να είναι μικρότερο από το 8;

- Έστω S το σύνολο όλων των πιθανών μεταθέσεων των στοιχείων 0,1,2,...,9. $|S| = N = 10!$
- c_1: το πρώτο ψηφίο μιας μετάθεσης είναι μικρότερο ή ίσο με 1, $N(c_1) = 2 \cdot 9!$
- c_2: το τελευταίο ψηφίο μιας μετάθεσης είναι μεγαλύτερο ή ίσο με 8, $N(c_2) = 2 \cdot 9!$
- Αυτό, που ζητάμε είναι το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2})$.
- $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}) = N - N(c_1) - N(c_2) + N(c_1 c_2) = 10! - 2 \cdot 9! - 2 \cdot 9! + 4 \cdot 8! = 2.338.560.$

Πόσοι ακέραιοι μεταξύ 1 και 70 είναι σχετικά πρώτοι το 70; (Σχετικά πρώτοι είναι δύο αριθμοί με μόνο κοινό διαιρέτη τη μονάδα.)

Είναι $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$.

- Έστω $S = \{1, 2, ..., 70\}$. $|S| = N = 70$
- c_1: ο αριθμός διαιρείται με 2, $N(c_1) = 35$
- c_2: ο αριθμός διαιρείται με 5, $N(c_2) = 14$
- c_3: ο αριθμός διαιρείται με 7, $N(c_3) = 10$
- Αυτό που ζητάμε είναι το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3})$.
- $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_2}) = N - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) + N(c_1 c_2) + N(c_1 c_3) + N(c_2 c_3) - N(c_1 c_2 c_3) = 70 - 35 - 14 - 10 + 7 + 5 + 2 - 1 = 24.$

Πόσες λέξεις των n συμβόλων από το αλφάβητο $\{0, 1$ υπάρχουν με ένα τουλάχιστον 0, ένα τουλάχιστον 1 και ένα τουλάχιστον 2 ;

- Έστω S το σύνολο όλων των πιθανών μεταθέσεων των στοιχείων 0,1,2 σε n θέσεις: $|S| = N = 3^n$
- c_1: η λέξη δεν περιέχει κανένα 0, $N(c_1) = 2^n$
- c_2: η λέξη δεν περιέχει κανένα 1, $N(c_2) = 2^n$
- c_3: η λέξη δεν περιέχει κανένα 2, $N(c_3) = 2^n$
- Αυτό, που ζητάμε είναι το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3})$.
- $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_2}) = N - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) + N(c_1 c_2) + N(c_1 c_3) + N(c_2 c_3) - N(c_1 c_2 c_3) =$
  $3^n - 2^n - 2^n - 2^n + 1 + 1 + 1 - 0 = 3(3^{n-1} - 2^n + 1)$.

Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε r αντικείμενα σε 5 διαφορετικά κουτιά, έτσι ώστε ένα τουλάχιστον κουτί να είναι άδειο;

- Ένα τουλάχιστον κουτί άδειο $=$ 1 ή 2 ή 3 ή 4 ή 5 κουτιά άδεια
- 1 κουτί άδειο: πλήθος τρόπων $= \binom{5}{1}4^r$ (διαλέγω 1 από τα 5 κουτιά να είναι το άδειο και μοιράζω τα r αντικείμενα στα υπόλοιπα 4 κουτιά)
- 2 κουτιά άδεια: πλήθος τρόπων $= \binom{5}{2}3^r$
- 3 κουτιά άδεια: πλήθος τρόπων $= \binom{5}{3}2^r$
- 4 κουτιά άδεια: πλήθος τρόπων $= \binom{5}{4}1^r = \binom{5}{4}$
- 5 κουτιά άδεια: πλήθος τρόπων $= \binom{5}{5}0^r = 0$
- Άρα, συνολικά: $5 \cdot 4^r + \binom{5}{2}3^r + \binom{5}{3}2^r + \binom{5}{4}$ τρόποι.

Με πόσους τρόπους μπορώ να τοποθετήσω r διαφορε αντικείμενα σε n διαφορετικά κουτιά, έτσι ώστε κανένα κουτί να μη μείνει άδειο;

- Καλούμε $c_1, c_2, \ldots c_n$ τις συνθήκες το 1ο, το 2ο, … το $n-$ό (αντίστοιχα) κουτί να μένει άδειο.
- Ζητάμε το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \ldots \overline{c_n})$.
- $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \ldots \overline{c_n}) = n^r - \binom{n}{1}(n-1)^r + \binom{n}{2}(n-2)^r - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}1^r + (-1)^n\binom{n}{n}0^r = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^r.$

Πόσοι θετικοί ακέραιοι $n, 1 \leq n \leq 100$ δε διαιρούνται τους 2,3 και 5;

- Έστω $S = \{1, 2, ..., 100\}$. $|S| = N = 100$
- c_1: ο αριθμός διαιρείται με 2, $N(c_1) = 50$
- c_2: ο αριθμός διαιρείται με 3, $N(c_2) = 33$
- c_3: ο αριθμός διαιρείται με 5, $N(c_3) = 20$
- Αυτό, που ζητάμε είναι το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3})$:
- $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_2}) = N - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) + N(c_1 c_2) + N(c_1 c_3) + N(c_2 c_3) - N(c_1 c_2 c_3) = 100 - 50 - 33 - 20 + 16 + 10 + 6 - 3 = 26.$

Πόσες μη αρνητικές λύσεις έχει η εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$, με $x_i \leq 7, 1 \leq i \leq 4$;

- Έστω S το σύνολο όλων των λύσεων της εξίσωσης.
  $|S| = N = \binom{18+4-1}{18} = \binom{21}{18}$
  - Γιατί; Ισούται με τους τρόπους, που μπορώ να τοποθετήσω 18 ίδια αντικείμενα (18 μονάδες) σε 4 διαφορετικές υποδοχές (τις μεταβλητές x_1, x_2, x_3, x_4)
- c_1: μια λύση (x_1, x_2, x_3, x_4) της εξίσωσης ικανοποιεί τη συνθήκη $x_1 > 7$
- c_2: μια λύση (x_1, x_2, x_3, x_4) της εξίσωσης ικανοποιεί τη συνθήκη $x_2 > 7$
- c_3: μια λύση (x_1, x_2, x_3, x_4) της εξίσωσης ικανοποιεί τη συνθήκη $x_3 > 7$
- c_4: μια λύση (x_1, x_2, x_3, x_4) της εξίσωσης ικανοποιεί τη συνθήκη $x_4 > 7$
- Αυτό, που ζητάμε είναι το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4})$.

Πόσες μη αρνητικές λύσεις έχει η εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$, με $x_i \leq 7, 1 \leq i \leq 4$;

- Θέλω να φτιάξω μια εξίσωση χωρίς περιορισμούς.
- Αν ισχύει η c_1 τότε ξέρω ότι $x_1 > 7$ ή ισοδύναμα $x_1 \geq 8$, δηλ. η μικρότερη τιμή, που μπορεί να πάρει η x_1 είναι 8.
- Λύνω την εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ και από κάθε λύση, που θα υπολογίσω παίρνω μία λύση για την αρχική εξίσωση προσθέτοντας στην τιμή του x_1 το 8.
- Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ είναι $\binom{10+4-1}{10} = \binom{13}{10}$.
- Επομένως, τόσες είναι και οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης που ικανοποιούν τη συνθήκη c_1.
- Τα ίδια ισχύουν και για τις συνθήκες c_2, c_3, c_4.

Πόσες μη αρνητικές λύσεις έχει η εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$, με $x_i \leq 7, 1 \leq i \leq 4$;

- Για να υπολογίσω τα $N(c_1c_2) = N(c_1c_3) = N(c_1c_4) = N(c_2c_3) = N(c_2c_4) = N(c_3c_4)$ ακολουθώ ανάλογη διαδικασία.
- Θέλω να φτιάξω μια εξίσωση χωρίς περιορισμούς.
- Αν ισχύει η c_1c_2, τότε ξέρω ότι $x_1 > 7, x_2 > 7$ ή ισοδύναμα $x_1 \geq 8, x_2 \geq 8$, δηλ. η μικρότερη τιμή, που μπορούν να πάρουν οι x_1, x_2 είναι 8.
- Λύνω την εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$ και από κάθε λύση, που θα υπολογίσω παίρνω μία λύση για την αρχική εξίσωση προσθέτοντας στην τιμή των x_1 και x_2 το 8.
- Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$ είναι $\binom{2+4-1}{2} = \binom{5}{2}$.
- Επομένως, τόσες είναι και οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης που ικανοποιούν το ζεύγος συνθηκών c_1c_2.
- Τα ίδια ισχύουν και για τα υπόλοιπα ζεύγη συνθηκών.

Πόσες μη αρνητικές λύσεις έχει η εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$, με $x_i \leq 7, 1 \leq i \leq 4$;

- Είναι $N(c_1c_2c_3) = N(c_1c_2c_4) = N(c_2c_3c_4) = 0$ αφού αν 3 από τις μεταβλητές έχουν τιμή τουλάχιστον 8 η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Όμοια, $N(c_1c_2c_3c_4) = 0$, αφού αν και οι 4 μεταβλητές έχουν τιμή τουλάχιστον 8, η εξίσωση είναι πάλι αδύνατη.
- Συνολικά:
$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = N - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) - N(c_4) + N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_1c_4) + N(c_2c_3) + N(c_2c_4) + N(c_3c_4) - N(c_1c_2c_3) - N(c_1c_2c_4) - N(c_2c_3c_4) + N(c_1c_2c_3c_4) = \binom{21}{18} - \binom{4}{1}\binom{13}{10} + \binom{4}{2}\binom{5}{2} - 0 + 0 = 246.$

Ποιο είναι το πλήθος των θετικών ακέραιων x, που εί τέτοιοι ώστε $x \leq 9999999$ και το άθροισμα των ψηφίων τους ισούται με 31;

- Έστω $x_1, x_2, ..., x_7$ τα δεκαδικά ψηφία του αριθμού x, που ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος.
- Ο ζητούμενος αριθμός των ακεραίων ισούται με το πλήθος ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + ... + x_7 = 31$, με $0 \leq x_i \leq 9$ για $1 \leq i \leq 7$.
- Έστω S το σύνολο όλων των λύσεων της εξίσωσης.
  $|S| = N = \binom{31+7-1}{31} = \binom{37}{31}$
  - Γιατί; Ισούται με τους τρόπους, που μπορώ να τοποθετήσω 31 ίδια αντικείμενα (31 μονάδες) σε 7 διαφορετικές υποδοχές (τις μεταβλητές $x_1, x_2, ..., x_7$).
- c_i: μια λύση $(x_1, x_2, ..., x_7)$ της εξίσωσης ικανοποιεί τη συνθήκη $x_i > 9 \Leftrightarrow x_i \geq 10$, για $1 \leq i \leq 7$. Προχωρώντας όπως και πριν:

Ποιο είναι το πλήθος των θετικών ακέραιων x, που είν τέτοιοι ώστε $x \leq 9999999$ και το άθροισμα των ψηφίων τους ισούται με 31;

- $N(c_i) = \binom{21+7-1}{21} = \binom{27}{21}$
- $N(c_i c_j) = \binom{11+7-1}{11} = \binom{17}{11}$
- $N(c_i c_j c_k) = \binom{1+7-1}{1} = \binom{7}{1} = 7$
- $N(c_i c_j c_k c_l) = N(c_i c_j c_k c_l c_m) = ... = N(c_i c_j c_k c_l c_m ... c_r) = 0$
- Οπότε: $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\ \overline{c_5}\ \overline{c_6}\ \overline{c_7}) =$ $\binom{37}{31} - \binom{7}{1}\binom{27}{21} + \binom{7}{2}\binom{17}{11} - \binom{7}{3}7 = 512.365$

Αν ρίξουμε 8 διαφορετικά ζάρια, ποια είναι η πιθανότ να εμφανιστούν και τα 6 διαφορετικά ενδεχόμενα;

- Το σύνολο όλων των πιθανών ενδεχομένων είναι: $|S| = N = 6^8$
- Καλούμε c_i την ιδιότητα: να μην εμφανιστεί το ενδεχόμενο i, για $1 \leq i \leq 6$. Αναζητούμε το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\ \overline{c_5}\ \overline{c_6})$. Είναι:
- $N(c_i) = 5^8, N(c_i c_j) = 4^8, N(c_i c_j c_k) = 3^8, N(c_i c_j c_k c_l) = 2^8, N(c_i c_j c_k c_l c_m) = 1^8, N(c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6) = 0$
- Οπότε, συνολικά, το ζητούμενο πλήθος λύσεων είναι: $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\ \overline{c_5}\ \overline{c_6}) = 6^8 - \binom{6}{1}5^8 + \binom{6}{2}4^8 - \binom{6}{3}3^8 + \binom{6}{4}2^8 - \binom{6}{5}1^8 + 0 = 191.520$

Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω 9 μπάλες από κουτί, που περιέχει 12 μπάλες, 3 πράσινες, 3 άσπρες, 3 μπλε και 3 κόκκινες;

- Ο αριθμός των ζητούμενων τρόπων ισούται με τον αριθμό ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$ με $0 \le x_i \le 3$ και $1 \le i \le 4$.
- c_i: η ιδιότητα σε κάποια λύση (x_1, x_2, x_3, x_4) της παραπάνω εξίσωσης το x_i να είναι μεγαλύτερο του 3.
- Τότε, ο ζητούμενος αριθμός λύσεων είναι: $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4})$
- Είναι: $N = \binom{9+4-1}{9} = \binom{12}{9}$, $N(c_i) = \binom{5+4-1}{5} = \binom{8}{5}$, $N(c_i c_j) = \binom{1+4-1}{1} = \binom{4}{1}$, $N(c_i c_j c_k) = 0$, $N(c_1 c_2 c_3 c_4) = 0$.
- Οπότε είναι:
  $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = \binom{12}{9} - \binom{4}{1}\binom{8}{5} + \binom{4}{2}\binom{4}{1} - 0 + 0 = 20.$

Πόσοι αριθμοί μεταξύ 1 και 250 δε διαιρούνται ακριβ... με κάποιον από τους 2,3,5,7;

- Καλούμε α_1 την ιδιότητα ένας αριθμός να διαιρείται ακριβώς με το 2, α_2 την ιδιότητα ένας αριθμός να διαιρείται ακριβώς με το 3, α_3 την ιδιότητα ένας αριθμός να διαιρείται ακριβώς με το 5, α_4 την ιδιότητα ένας αριθμός να διαιρείται ακριβώς με το 7.

$$N(\alpha_1) = \left\lfloor \frac{250}{2} \right\rfloor = 125 \qquad N(\alpha_2) = \left\lfloor \frac{250}{3} \right\rfloor = 83$$

$$N(\alpha_3) = \left\lfloor \frac{250}{5} \right\rfloor = 50 \qquad N(\alpha_4) = \left\lfloor \frac{250}{7} \right\rfloor = 35$$

$$N(\alpha_1\alpha_2) = \left\lfloor \frac{250}{2\times 3} \right\rfloor = 41 \qquad N(\alpha_1\alpha_3) = \left\lfloor \frac{250}{2\times 5} \right\rfloor = 25$$

$$N(\alpha_1\alpha_4) = \left\lfloor \frac{250}{2\times 7} \right\rfloor = 17 \qquad N(\alpha_2\alpha_3) = \left\lfloor \frac{250}{3\times 5} \right\rfloor = 16$$

$$N(\alpha_2\alpha_4) = \left\lfloor \frac{250}{3\times 7} \right\rfloor = 11 \qquad N(\alpha_3\alpha_4) = \left\lfloor \frac{250}{5\times 7} \right\rfloor = 7$$

$$N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = \left\lfloor \frac{250}{2\times 3\times 5} \right\rfloor = 8 \qquad N(\alpha_1\alpha_2\alpha_4) = \left\lfloor \frac{250}{2\times 3\times 7} \right\rfloor = 5$$

$$N(\alpha_1\alpha_3\alpha_4) = \left\lfloor \frac{250}{2\times 5\times 7} \right\rfloor = 3 \qquad N(\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = \left\lfloor \frac{250}{3\times 5\times 7} \right\rfloor = 2$$

$$N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = \left\lfloor \frac{250}{2\times 3\times 5\times 7} \right\rfloor = 1$$

Πόσοι αριθμοί μεταξύ 1 και 250 δε διαιρούνται ακριβώς με κάποιον από τους 2,3,5,7;

- Το πλήθος των αριθμών, που δε διαιρούνται με κανέναν από τους 2,3,5,7 είναι:

$$\begin{aligned} N(\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3'\alpha_4') &= 250 - (125 + 83 + 50 + 35) \\ &+ (41 + 25 + 17 + 16 + 11 + 7) \\ &- (8 + 5 + 3 + 2) + 1 = 57 \end{aligned}$$

- Ενώ, π.χ., το πλήθος των αριθμών, που δε διαιρούνται με 2 και 7 αλλά διαιρούνται με 5 είναι:

$$\begin{aligned} N(\alpha_1'\alpha_3\alpha_4') &= N(\alpha_3) - N(\alpha_1\alpha_3) - N(\alpha_3\alpha_4) + N(\alpha_1\alpha_3\alpha_4) \\ &= 50 - 25 - 7 + 3 = 21 \end{aligned}$$

Ο γενικός τύπος

- Δίνει το πλήθος των αντικειμένων, που έχουν m από r ιδιότητες, $m = 0, 1, 2, 3, ..., r$.
- s_i: πλήθος αντικειμένων, που πληρούν i από τις r ιδιότητες.
- e_i: πλήθος αντικειμένων, που πληρούν ακριβώς i από τις r ιδιότητες, δηλ., πληρούν i από τις r ιδιότητες και δεν πληρούν τις υπόλοιπες $r - i$.

Ο γενικός τύπος

Αναλυτικά:

- $s_0 = N$
- $s_1 = N(a_1) + N(a_2) + ... + N(a_r) = \sum_i N(a_i)$
- $s_2 = N(a_1 a_2) + N(a_1 a_3) + ... + N(a_{r-1} a_r) = \sum_{i,j:i \neq j} N(a_i a_j)$
- $s_3 = N(a_1 a_2 a_3) + N(a_1 a_2 a_4) + ... + N(a_{r-2} a_{r-1} a_r) = \sum_{i,j,k:i \neq j \neq k} N(a_i a_j a_k)$
- ...
- $s_r = N(a_1 a_2 ... a_r)$

Ο γενικός τύπος

Αναλυτικά:

- $e_0 = N(\overline{a_1}\ \overline{a_2}\ ...\overline{a_r}\ )$
- $e_1 = N(a_1\overline{a_2}\ ...\overline{a_r}) + N(\overline{a_1}\ a_2\overline{a_3}\ ...\overline{a_r}) + ... + N(\overline{a_1}\ \overline{a_2}\ ...a_r)$
- $e_2 = N(a_1 a_2\overline{a_3}...\overline{a_r} + N(a_1\overline{a_2}\ a_3...\overline{a_r}))$
- $e_3 = N(a_1 a_2 a_3...\overline{a_r}) + N(a_1 a_2\overline{a_3}a_4...\overline{a_r}) + ... +$ $N(\overline{a_1}\ \overline{a_2}\ \overline{a_3}...a_{r-2}a_{r-1}a_r)$
- ...
- $e_r = N(a_1 a_2...a_r)$

Προφανώς, $e_0 = s_0 - s_1 + s_2 - s_3 + ... + (-1)^r s_r$.

Ο γενικός τύπος

$$e_m = s_m - \binom{m+1}{1} s_{m+1} + \binom{m+2}{2} s_{m+2} - \ldots + (-1)^{r-m} \binom{r}{r-m} s_r$$

Η απόδειξη βασίζεται στα εξής:

- Αντικείμενο, που έχει λιγότερες από m ιδιότητες δε συμπεριλαμβάνεται στο e_m και δε συνεισφέρει στην έκφραση στο δεξί μέρος της ισότητας.
- Αντικείμενο, που έχει ακριβώς m ιδιότητες συμπεριλαμβάνεται στο e_m και συνεισφέρει 1 στην έκφραση στο δεξί μέρος της ισότητας, αφού μετριέται μία φορά στο s_m και δε μετριέται στους όρους $s_{m+1}, s_{m+2}, \ldots s_r$.
- Αντικείμενο, που έχει $m+j$ ιδιότητες δε συμπεριλαμβάνεται στο e_m και συνεισφέρει $\binom{m+j}{m}$ στον όρο s_m, $\binom{m+j}{m+1}$ στον όρο s_{m+1}, …, $\binom{m+j}{m+j}$ στον όρο s_{m+j}, που συνολικά ισούται με 0.

- Αναζητούμε την τιμή της έκφρασης:

$$\binom{m+j}{m} - \binom{m+1}{1}\binom{m+j}{m+1} + \binom{m+2}{2}\binom{m+j}{m+2} - \dots + (-1)^j \binom{m+j}{j}\binom{m+j}{m+j}$$

- Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}\binom{m+k}{k}\binom{m+j}{m+k} &= \frac{(m+k)!}{m!k!}\frac{(m+j)!}{(m+k)!(j-k)!}\\ &= \frac{(m+j)!}{m!k!(j-k)!}\\ &= \frac{(m+j)!}{m!j!}\frac{j!}{k!(j-k)!}\\ &= \binom{m+j}{m}\binom{j}{k}\end{aligned}$$

- Οπότε:

$$\binom{m+j}{m} - \binom{m+j}{m}\binom{j}{1} + \binom{m+j}{m}\binom{j}{2} - \dots + (-1)^j\binom{m+j}{m}\binom{j}{j}$$

$$= \binom{m+j}{m}\left[\binom{j}{0} - \binom{j}{1} + \binom{j}{2} - \dots + (-1)^j\binom{j}{j}\right]$$
$$= 0$$

Παράδειγμα

12 μπάλες χρωματίζονται ως εξής:

- 2 δε λαμβάνουν κανένα χρώμα.
- 2 χρωματίζονται κόκκινες, 1 μπλε και 1 άσπρη.
- 2 χρωματίζονται με κόκκινο και μπλε και 1 χρωματίζεται με κόκκινο και άσπρο.
- 3 χρωματίζονται με κόκκινο, μπλε και άσπρο.

Καλούμε a_1, a_2, a_3 την ιδιότητα: η μπάλα χρωματίζεται με το κόκκινο, μπλε, άσπρο χρώμα, αντίστοιχα. Είναι:

- $N(a_1) = 8, N(a_2) = 6, N(a_3) = 5$
- $N(a_1a_2) = 5, N(a_1a_3) = 4, N(a_2a_3) = 3$
- $N(a_1a_2a_3) = 3$
- $s_1 = 19, s_2 = 12, s_3 = 3$
- $e_1 = 19 - \binom{2}{1} \cdot 12 + \binom{3}{2} \cdot 3 = 19 - 24 + 9 = 4$
- $e_2 = 12 - \binom{3}{1} \cdot 3 = 12 - 9 = 3$
- $e_3 = 3$

Ο γενικός τύπος για άρτιο και περιττό πλήθος ιδιοτήτ

Για δεδομένο πλήθος r ιδιοτήτων:

- e_i είναι το πλήθος των στοιχείων, που έχουν i από τις r ιδιότητες και δεν έχουν τις υπόλοιπες $r - i$ (ενώ s_i είναι το πλήθος των στοιχείων, που έχουν i ιδιότητες. Προφανώς: $s_i \geq e_i$).
- Η γεννήτρια συνάρτηση που μετρά το πλήθος των αντικειμένων που έχουν καμία, **μόνο** μία, **μόνο** δύο, ..., όλες τις ιδιότητες είναι η:

$$E(x) = e_0 x^0 + e_1 x^1 + e_2 x^2 + \ldots + e_r x^r = \sum_{j=0}^{r} s_j (x-1)^j$$

- Για $x = 1$: $E(1) = e_0 + e_1 + e_2 + \ldots + e_r = s_0$

$$e_m = s_m - \binom{m+1}{1} s_{m+1} + \binom{m+2}{2} s_{m+2} - \dots + (-1)^{r-m} \binom{r}{r-m} s_r$$

$$\begin{aligned}
E(x) &= e_0 + e_1 x + e_2 x^2 + \dots + e_r x^r \\
&= [s_0 - s_1 + s_2 - \dots + (-1)^r s_r] \\
&+ \left[s_1 - \binom{2}{1} s_2 + \binom{3}{2} s_3 - \dots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r-1} s_r \right] x \\
&+ \left[s_2 - \binom{3}{1} s_3 + \binom{4}{2} s_4 - \dots + (-1)^{r-2} \binom{r}{r-2} s_r \right] x^2 \\
&+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ \left[s_m - \binom{m+1}{1} s_{m+1} + \binom{m+2}{2} s_{m+2} - \dots \right. \\
&\qquad\qquad \left. + (-1)^{r-m} \binom{r}{r-m} s_r \right] x^m \\
&+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ s_r x^r
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= s_0 \\
&\quad + s_1[x-1] \\
&\quad + s_2\left[x^2 - \binom{2}{1}x + 1\right] \\
&\quad + s_3\left[x^3 - \binom{3}{1}x^2 + \binom{3}{2}x - 1\right] \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + s_m\left[x^m - \binom{m}{1}x^{m-1} + \binom{m}{2}x^{m-2} + \ldots\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + (-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}x + (-1)^m\right] \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + s_r\left[x^r - \binom{r}{1}x^{r-1} + \binom{r}{2}x^{r-2} + \ldots + (-1)^r\right] \\
&\quad = \sum_{j=0}^{r} s_j (x-1)^j
\end{aligned}
$$

Ο γενικός τύπος για άρτιο και περιττό πλήθος ιδιοτήτ

$$E(x) = e_0x^0 + e_1x^1 + e_2x^2 + \ldots + e_rx^r = \sum_{j=0}^{r} s_j(x-1)^j$$

- Για $x = 1$: $E(1) = e_0 + e_1 + e_2 + \ldots + e_r = s_0$
- Για $x = -1$: $E(-1) = \sum_{j=0}^{r} s_j(-2)^j$
- $\frac{1}{2}[E(1) + E(-1)] = \frac{1}{2}[e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \ldots + e_0 - e_1 + e_2 - e_3 + e_4 \ldots] = e_0 + e_2 + e_4 + \ldots = \frac{1}{2}[s_0 + \sum_{j=0}^{r}(-2)^j s_j]$: πλήθος αντικειμένων με άρτιο αριθμό ιδιοτήτων
- $\frac{1}{2}[E(1) - E(-1)] = \frac{1}{2}[e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \ldots - e_0 + e_1 - e_2 + e_3 - e_4 \ldots] = e_1 + e_3 + e_5 + \ldots = \frac{1}{2}[s_0 - \sum_{j=0}^{r}(-2)^j s_j]$: πλήθος αντικειμένων με περιττό αριθμό ιδιοτήτων

Ποιος είναι ο αριθμός των τετραδικών ακολουθιών με ψηφία, που περιέχουν άρτιο αριθμό από 0;

- Καλούμε a_i την ιδιότητα το i-τό ψηφίο μιας συμβολοσειράς να είναι 0 για $i = 1, 2, 3, ..., n$
- Είναι $s_j = \binom{n}{j} 3^{n-j}$ με $j = 0, 1, 2, 3, ..., n$. Γιατί;
  - s_j: πλήθος τετραδικών συμβολοσειρών με n ψηφία από τα οποία j είναι 0.
  - $\binom{n}{j}$: πλήθος τρόπων να διαλέξω τα j ψηφία σε κάποια τέτοια συμβολοσειρά που θα είναι 0.
  - Για κάθε τέτοια επιλογή j ψηφίων, τα υπόλοιπα $n - j$ μπορούν να έχουν 3 διαφορετικές τιμές: 1,2,3 αφού οι συμβολοσειρές είναι στο τετραδικό σύστημα: 3^{n-j} πιθανές συμβολοσειρές $n - j$ ψηφίων.
- Επίσης, είναι: $e_0 + e_2 + e_4 + ... = \frac{1}{2}[s_0 + \sum_{j=0}^{r}(-2)^j s_j] =$

$$\frac{1}{2}[3^n + \sum_{j=0}^{n}(-2)^j \binom{n}{j} 3^{n-j}] = \frac{1}{2}[3^n + (3-2)^n] = \frac{1}{2}(3^n + 1)$$