Διακριτά Μαθηματικά Ι

Φροντιστήριο

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

Σε ένα σχολείο υπάρχουν 1000 μαθητές. Απ' αυτούς 400 μιλάνε Γαλλικά, οι 300 Ιταλικά και 200 μιλάνε Γερμανικά. Εάν υπάρχουν 200 μαθητές,που μιλάνε οποιεσδήποτε 2 γλώσσες και 100 μαθητές, που μιλάνε και τις 3 γλώσσες, πόσοι είναι οι μαθητές, που δε μιλάνε καμμιά γλώσσα;

Σε ένα σχολείο υπάρχουν 1000 μαθητές. Απ' αυτούς 400 μιλάνε Γαλλικά, οι 300 Ιταλικά και 200 μιλάνε Γερμανικά. Εάν υπάρχουν 200 μαθητές,που μιλάνε οποιεσδήποτε 2 γλώσσες και 100 μαθητές, που μιλάνε και τις 3 γλώσσες, πόσοι είναι οι μαθητές, που δε μιλάνε καμμιά γλώσσα;

Έστω S το σύνολο των μαθητών με $N = |S| = 1000$. Έστω επίσης F, I, G τα γεγονότα ένας μαθητής να μιλάει Γαλλικά, Ιταλικά ή Γερμανικά αντίστοιχα. Τότε ψάχνουμε το $N(\overline{F}\ \overline{I}\ \overline{G})$ και σύμφωνα με την Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού έχουμε,

$$N(\overline{F}\ \overline{I}\ \overline{G}) =$$

$$= N - N(F) - N(I) - N(G) + N(FI) + N(FG) + N(IG) - N(FIG) =$$

$$= 1000 - 400 - 300 - 200 + 200 - 100 = 200$$

.

Χρησιμοποιώντας την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού, υπολογίστε πόσοι ακέραιοι μεταξύ 1 και 110 είναι σχετικά πρώτοι με το 110; (Σχετικά πρώτοι είναι δύο αριθμοί με μόνο κοινό διαιρέτη τη μονάδα.)

Χρησιμοποιώντας την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού, υπολογίστε πόσοι ακέραιοι μεταξύ 1 και 110 είναι σχετικά πρώτοι με το 110; (Σχετικά πρώτοι είναι δύο αριθμοί με μόνο κοινό διαιρέτη τη μονάδα.)

Αναλύουμε τον αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων: $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$.
Έστω το σύνολο $S = \{1, 2, ..., 110\}$ με πληθικό αριθμό $|S| = N = 110$ και τις συνθήκες c_i,$(1 \leq i \leq 3)$, που αποτελούν το γεγονός ένας αριθμός $k \in S$ να διαιρείται με το 2, 5 και 11 αντίστοιχα. Για να μην είναι ένας $k \in S$ σχετικά πρώτος διαιρέσιμος με το 110 πρέπει να μην είναι διαιρέσιμος με κανέναν από τους 2, 5, 11. Άρα, ο αριθμός των στοιχείων του S, τα οποία δεν ικανοποιούν καμία από τις συνθήκες c_i,$(1 \leq i \leq 3)$ είναι το $\overline{N} = N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}) =$
$N - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) + N(c_1 c_2) + N(c_1 c_3) + N(c_2 c_3) - N(c_1 c_2 c_3)$.

- c_1: ο αριθμός διαιρείται με 2 με $N(c_1) = 55$
- c_2: ο αριθμός διαιρείται με 5 με $N(c_2) = 22$
- c_3: ο αριθμός διαιρείται με 11 με $N(c_3) = 10$
- Επιπλέον είναι: $N(c_1 c_2) = 11$, $N(c_1 c_3) = 5$, $N(c_2 c_3) = 2$, $N(c_1 c_2 c_3) = 1$
- Με αντικατάσταση στον αρχικό τύπο, προκύπτει: $N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}\,\overline{c_3}) = N - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) + N(c_1 c_2) + N(c_1 c_3) + N(c_2 c_3) - N(c_1 c_2 c_3) = 110 - 55 - 22 - 10 + 11 + 5 + 2 - 1 = 40$

Χρησιμοποιώντας την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού, υπολογίστε πόσες τοποθετήσεις των ψηφίων $0, 1, 2, ..., 9$ υπάρχουν, στις οποίες το πρώτο ψηφίο να είναι μεγαλύτερο από το 1 και το τελευταίο ψηφίο να είναι μικρότερο από το 8.

Χρησιμοποιώντας την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού, υπολογίστε πόσες τοποθετήσεις των ψηφίων $0, 1, 2, ..., 9$ υπάρχουν, στις οποίες το πρώτο ψηφίο να είναι μεγαλύτερο από το 1 και το τελευταίο ψηφίο να είναι μικρότερο από το 8.

- Έστω S το σύνολο όλων των πιθανών μεταθέσεων των στοιχείων $0, 1, 2, ..., 9$.
- $|S| = N = 10!$
- c_1: το πρώτο ψηφίο μιας μετάθεσης είναι μικρότερο ή ίσο με 1, $N(c_1) = 2 \cdot 9!$
- c_2: το τελευταίο ψηφίο μιας μετάθεσης είναι μεγαλύτερο ή ίσο με 8, $N(c_2) = 2 \cdot 9!$
- Αυτό που ζητάμε είναι το:
  $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}) = N - N(c_1) - N(c_2) + N(c_1 c_2) =$
  $10! - 2 \cdot 9! - 2 \cdot 9! + 4 \cdot 8! = 2338560.$

Ένας φοιτητής θέλει να φτιάξει ένα πρόγραμμα για μ χρονική περίοδο 7 ημερών, έτσι ώστε κάθε μέρα να μελετά ένα μόνο μάθημα. Τα μαθήματα είναι μαθηματικά, φυσική, χημεία και οικονομία. Να βρεθεί ο αριθμός αυτών των προγραμμάτων.

Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τις λέξεις 7 ψηφίων, που μπορούμε να φτιάξουμε από το αλφάβητο μ,φ,χ,ο, όπου όμως σε κάθε λέξη θα χρησιμοποιούμε κάθε γράμμα του αλφαβήτου αυτού τουλάχιστον 1 φορά. Έστω S το σύνολο όλων των λέξεων 7 ψηφίων από το συγκεκριμμένο αλφάβητο. Τότε, $N = |S| = 4^7 = 16.384$. Έστω επίσης $c_i, 1 \leq i \leq 4$, η ιδιότητα το γράμμα μ,φ,χ,ο να μην περιέχεται καμμιά φορά σε μία λέξη του S αντίστοιχα.

Δηλαδή, θέλουμε να υπολογίσουμε το:

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = N - [N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) + N(c_4)] +$$

$$+[N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \ldots + N(c_3c_4)] -$$

$$-[N(c_1c_2c_3) + N(c_1c_2c_4) + N(c_1c_3c_4) + N(c_2c_3c_4)] +$$

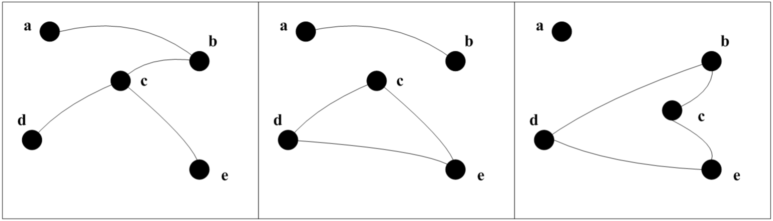
$$+N(c_1c_2c_3c_4) =$$

$$= 16.384 - 4 \cdot 3^7 + 6 \cdot 2^7 - 4 + 0 = 8400$$

.

Έχουμε 5 χωριά και θέλουμε να τα ενώσουμε με δρόμ
έτσι ώστε να μην υπάρχει χωριό ΑΠΟΜΟΝΩΜΕΝΟ.
Χρησιμοποιώντας την ΑΡΧΗ ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΥ-ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΥ, να βρείτε με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει.

Έχουμε 5 χωριά και θέλουμε να τα ενώσουμε με δρόμ έτσι ώστε να μην υπάρχει χωριό ΑΠΟΜΟΝΩΜΕΝΟ. Χρησιμοποιώντας την ΑΡΧΗ ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΥ-ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΥ, να βρείτε με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει.



ΚΑΛΗ | ΚΑΛΗ | ΜΗ - ΚΑΛΗ

Προφανώς, υπάρχουν $\binom{5}{2} = 10$ πιθανοί δρόμοι και άρα,
$N = |S| = 2^{10}$, γιατί κάθε δρόμος μπορεί να υπάρχει ή να μην υπάρχει.
Για $1 \le i \le 5$, ας είναι c_i η συνθήκη ότι το σύστημα των δρόμων απομονώνει τα χωριά a, b, c, d και e αντίστοιχα.
Επομένως, η απάντηση είναι: $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\ \overline{c_5})$.
Έχουμε $N(c_1) = 2^6, \quad s_1 = \binom{5}{1}2^6, \quad N(c_1c_2) = 2^3, \quad s_2 = \binom{5}{2}2^3$
$N(c_1c_2c_3) = 2^1, \quad s_3 = \binom{5}{3}2^1, \quad N(c_1c_2c_3c_4) = 2^0, \quad s_4 = \binom{5}{4}2^0$
$N(c_1c_2c_3c_4c_5) = 2^0, \quad s_5 = \binom{5}{5}2^0$.
Επομένως:
$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\ \overline{c_5}) = 2^{10} - \binom{5}{1}2^6 + \binom{5}{2}2^3 - \binom{5}{3}2^1 + \binom{5}{4}2^0 - \binom{5}{5}2^0 = 768.$