Τμήμα Μηχανικών Η.Υ. & Πληροφορικής
Εξέταση στο μάθημα ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
Ημερομηνία 5 Ιουλίου 2010

Ενδεικτικές λύσεις

Θέμα 1. (3.5 μονάδες)

Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν r διαφορετικές σημαίες σε n διαφορετικούς ιστούς με δεδομένα ότι (α) έχει σημασία η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι σημαίες στους ιστούς και (β) κανένας ιστός δεν πρέπει να μείνει άδειος ($r \geq n$);

- Για να ισχύει το (β): $P(r,n) = r(r-1)...(r-n+1) = \dfrac{r!}{(r-n)!}$ τρόποι
- Για να ισχύει και το (α): $\dfrac{(r-n+n-1)!}{(n-1)!} = \dfrac{(r-1)!}{(n-1)!}$ τρόποι

Επομένως, συνολικά: $\dfrac{r!}{(r-n)!} \cdot \dfrac{(r-1)!}{(n-1)!}$ τρόποι.

Θέμα 2. (3.5 μονάδες)

2.1 Έχουμε άσπρες, πράσινες και κόκκινες μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε r από αυτές;

- Από τις άσπρες μπάλες μπορούμε να διαλέξουμε με 1 τρόπο κάθε φορά 0,1,2,3,... από αυτές $\Rightarrow$ Γεννήτρια συνάρτηση για τις άσπρες μπάλες είναι:

$$1 + z + z^2 + z^3 + ... = \frac{1}{1-z}$$

- Από τις πράσινες μπάλες μπορούμε να διαλέξουμε με 1 τρόπο κάθε φορά 0,1,2,3,... από αυτές $\Rightarrow$ Γεννήτρια συνάρτηση για τις πράσινες μπάλες:

$$1 + z + z^2 + z^3 + ... = \frac{1}{1-z}$$

- Από τις κόκκινες μπάλες μπορούμε να διαλέξουμε με 1 τρόπο κάθε φορά 0,1,2,3,... από αυτές $\Rightarrow$ Γεννήτρια συνάρτηση για τις κόκκινες μπάλες:

$$1 + z + z^2 + z^3 + ... = \frac{1}{1-z}$$

- Άρα, η τελική γεννήτρια συνάρτηση για το ‘‘διαλέγω κάποιες από άσπρες, πράσινες και κόκκινες μπάλες ’’ είναι η: $(\dfrac{1}{1-z})^3$

– Το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορώ να διαλέξω r από αυτές δίνεται από το συντελεστή του z^r στο $(\frac{1}{1-z})^3$

– $(\frac{1}{1-z})^3 = (1-z)^{-3} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2+k}{k} z^k$

– Οπότε ο συντελεστής του z^r στο $(\frac{1}{1-z})^3$ είναι: $\binom{2+r}{r}$, που είναι το πλήθος των ζητούμενων τρόπων.

Εναλλακτικά
Με απλή συνδυαστική: θέλω να διαλέξω r από 3 αντικείμενα με επαναλήψεις: αυτό μπορεί να γίνει με

$$\binom{3+r-1}{r} = \binom{2+r}{r}$$

τρόπους.

2.2 Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\frac{(3n)!}{2^n 3^n}$ είναι ακέραιος.

– Έχουμε $3n$ στοιχεία χωρισμένα σε n ομάδες.

– Κάθε μία από τις n ομάδες περιέχει 3 ίδια στοιχεία.

– Ο αριθμός των μεταθέσεων των $3n$ στοιχείων είναι:

$$\frac{(3n)!}{3!3!...3!} = \frac{(3n)!}{(3!)^n} = \frac{(3n)!}{(2\cdot 3)^n} = \frac{(3n)!}{2^n \cdot 3^n}$$

που είναι ακέραιος γιατί αναπαριστά αριθμό μεταθέσεων.

Θέμα 3. (4 μονάδες)

3.1 Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν n άτομα ώστε να καθήσουν σε κύκλο;

– Υπάρχουν $n!$ μεταθέσεις για τα n άτομα αν δε λάβουμε υπόψη τις συμμετρίες.

– Υπάρχουν $G = \{\pi_1, ...\pi_n\}$ μεταθέσεις: π_1, η ταυτοτική και κάθε μία από τις επόμενες προκύπτει από την προηγούμενη με μετατόπισή της κατά μία θέση κατά τη φορά του ρολογιού.

– Στην π_1 μένουν ίδιες όλες οι θέσεις, δηλ., $n!$ στοιχεία. Σε κάθε μια από τις υπόλοιπες μεταθέσεις καμία θέση δε μένει η ίδια, άρα αναλλοίωτα μένουν 0 στοιχεία.

– Άρα, ο συνολικός αρθμός των κλάσεων ισοδυναμίας είναι $\frac{1}{n}(n!+0+...+0) = (n-1)!$.

Εναλλακτικά

Με απλή συνδυαστική: Διαλέγω αυθαίρετα ένα άτομο και το τοποθετώ στη βόρεια θέση. Αυτό δεν εισάγει κάτι στο μέτρημα. Τα υπόλοιπα $n-1$ άτομα μπορούν να τοποθετηθούν αριστερόστροφα (ή δεξιόστροφα, δεν έχει σημασία) κατά όλες τις δυνατές αντιμεταθέσεις των $n-1$, δηλαδή με $(n-1)!$ τρόπους.

3.2 Πόσες τοποθετήσεις των ψηφίων 0,1,2,...,9 υπάρχουν στις οποίες το πρώτο ψηφίο να είναι μεγαλύτερο από το 1 και το τελευταίο ψηφίο να είναι μικρότερο από το 8;

- Έστω S το σύνολο όλων των πιθανών μεταθέσεων των στοιχείων 0,1,2,...,9. $|S| = N = 10!$
- c_1: το πρώτο ψηφίο μιας μετάθεσης είναι μικρότερο ή ίσο με 1, $N(c_1) = 2 \cdot 9!$
- c_2: το τελευταίο ψηφίο μιας μετάθεσης είναι μεγαλύτερο ή ίσο με 8, $N(c_2) = 2 \cdot 9!$
- Αυτό που ζητάμε είναι το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2})$.
- $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}) = N - N(c_1) - N(c_2) + N(c_1 c_2) = 10! - 2 \cdot 9! - 2 \cdot 9! + 4 \cdot 8! = 2.338.560$