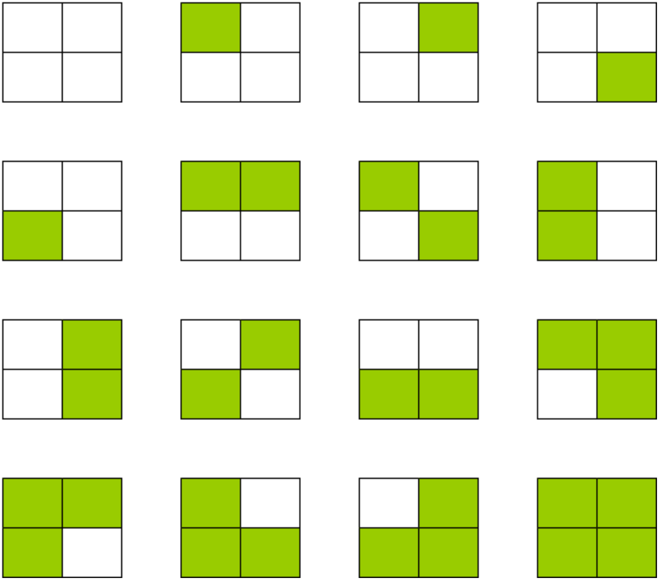
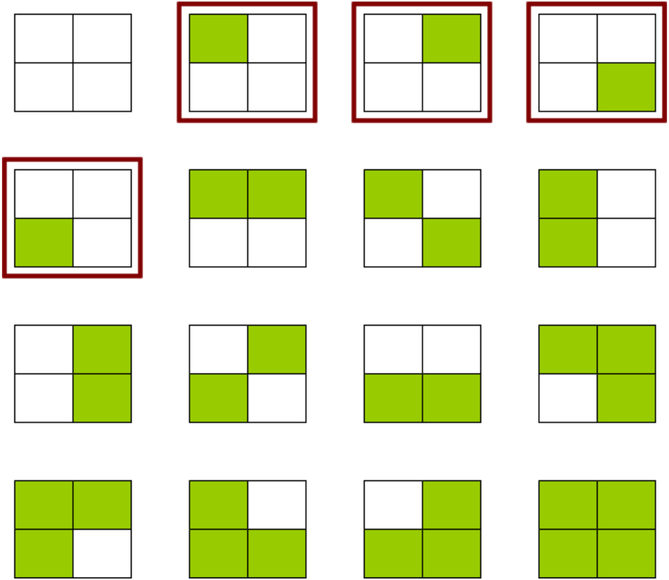
Η ύλη συνοπτικά...

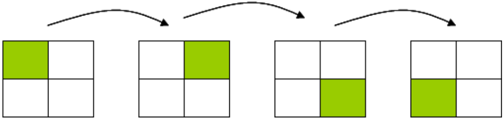
- Στοιχειώδης συνδυαστική
- Γεννήτριες συναρτήσεις
- Σχέσεις αναδρομής
- Θεωρία Μέτρησης Pólya
- Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού



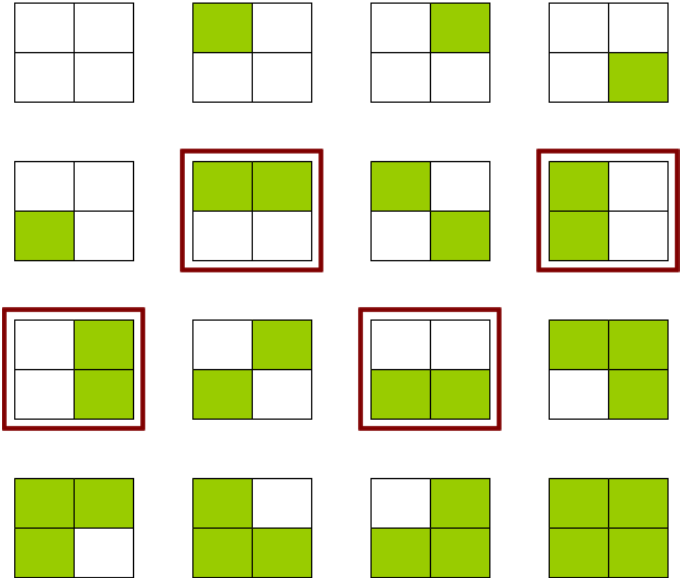
Πόσες από αυτές τις σκακιέρες είναι αλήθεια διαφορετικές;



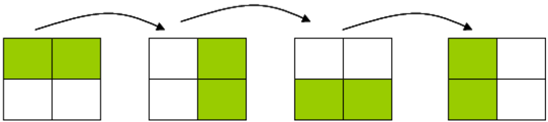
Αυτές οι σκακιέρες είναι στην ουσία ίδιες... δηλ. ισοδύναμες!



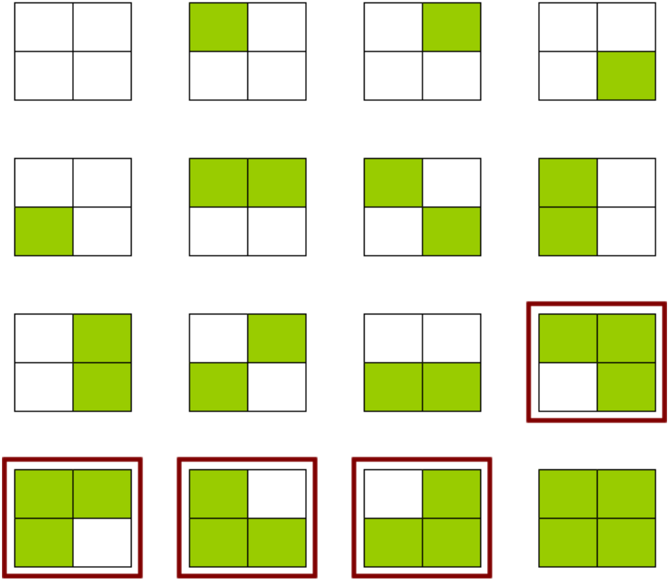
Η κάθε μία προκύπτει από την προηγούμενη με δεξιόστροφη περιστροφή κατά 90^o.



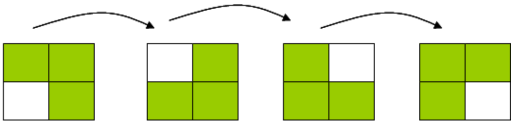
Αυτές οι σκακιέρες είναι στην ουσία ίδιες... δηλ. ισοδύναμες!



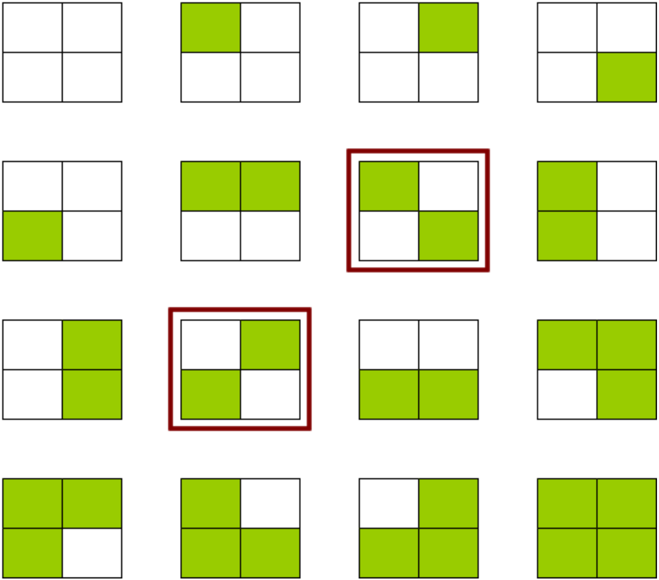
Η κάθε μία προκύπτει από την προηγούμενη με δεξιόστροφη περιστροφή κατά 90^o.



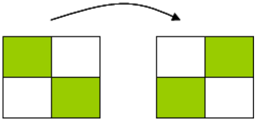
Αυτές οι σκακιέρες είναι στην ουσία ίδιες... δηλ. ισοδύναμες!



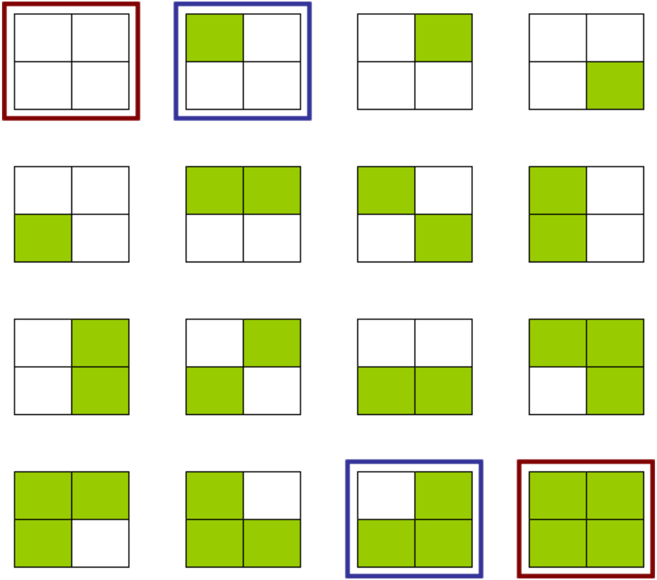
Η κάθε μία προκύπτει από την προηγούμενη με δεξιόστροφη περιστροφή κατά 90^o.



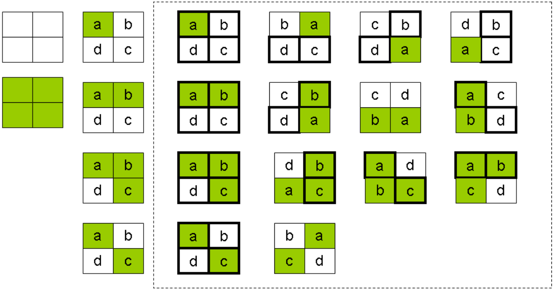
Αυτές οι σκακιέρες είναι στην ουσία ίδιες... δηλ. ισοδύναμες!



Η κάθε μία προκύπτει από την προηγούμενη με δεξιόστροφη περιστροφή κατά 90^o.



Αυτές οι σκακιέρες είναι ισοδύναμες ως προς την αντίθεση χρωμάτων...!



- Πόσους τρόπους να αναδιατάξω τη σκακιέρα έχω; 6
  - Να τα αφήσω όλα ως έχουν
  - Να τα κάνω όλα πράσινα
  - Να κάνω 1 πράσινο
  - Να κάνω 2 διπλανά πράσινα
  - Να κάνω 2 μη διπλανά πράσινα
  - Να κάνω 3 πράσινα

- Προφανώς, δεν είναι αποδοτικό για κάθε παραπλήσια ερώτηση να κάνουμε την εξαντλητική αναζήτηση, που κάναμε πριν ή να βασιζόμαστε απλά στην παρατήρηση για να μετρήσουμε το πλήθος των διαφορετικών αντικειμένων, όταν εμφανίζονται ομοιότητες λόγω κάποιας μορφής συμμετρίας στη δομή των αντικειμένων...
- Υπάρχει κάποια ιδιότητα, που να έχουν τα διαφορετικά (ή τα ίδια) αντικείμενα βάσει της οποίας να έχουμε ένα συστηματικό τρόπο προσδιορισμού των ‘‘διαφορετικών’’ αντικειμένων;
- Στη συνέχεια, θα δούμε τη θεωρία μέτρησης διαφορετικών αντικειμένων, όταν λαμβάνονται υπόψη θέματα συμμετρίας, που αναπτύχθηκε από τον Pólya το 1938.

Βασικά στοιχεία θεωρίας συνόλων

- Σύνολο, υποσύνολο, γνήσιο υποσύνολο
- Ένωση, Τομή, Διαφορά
- Διαμέριση
- Διατεταγμένο ζεύγος
- Καρτεσιανό γινόμενο
- Δυαδικές σχέσεις

Σύνολο, υποσύνολο, γνήσιο υποσύνολο

- Σύνολο: συλλογή διαφορετικών αντικειμένων, που καλούνται στοιχεία του συνόλου, π.χ., $S = \{a, b, c, x, z\}$
  - Δε μετράει η σειρά των στοιχείων: $\{a, b, c\} = \{c, b, a\}$
  - Δεν έχουν νόημα οι επαναλήψεις ίδιων στοιχείων: $\{a, a, b, c\} = \{a, b, c\}$
  - $\{\} = \emptyset$: σύνολο χωρίς στοιχεία
- $T \subseteq S$: Το T είναι υποσύνολο του S δηλ., κάθε στοιχείο του T είναι και στοιχείο του S, π.χ., $\{a, b, x\} \subseteq \{a, b, c, x, z\}$, $\{a, b, y\} \nsubseteq \{a, b, c, x, z\}$
  – Κάθε σύνολο είναι υποσύνολο του εαυτού του.
- $T \subset S$: Το T είναι γνήσιο υποσύνολο του S δηλ., το T είναι υποσύνολο του S και υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο στο S, που δεν είναι στοιχείο του T.
- $\alpha \in S$: το α είναι στοιχείο του συνόλου S
- $|S|$: πλήθος στοιχείων του συνόλου S
- Το S είναι ένα $k-$σύνολο, αν περιέχει k στοιχεία.

Ένωση, Τομή, Διαφορά, Διαμέριση

Έστω δύο σύνολα A και B.

- $A \cup B$: Ένωση των συνόλων A και B, περιέχει όλα τα στοιχεία των συνόλων A και B.
  $-\{a, b, c, d\} \cup \{a, d, e, j\} = \{a, b, c, d, e, j\}$
- $A \cap B$: Τομή των συνόλων A και B, περιέχει τα κοινά στοιχεία των συνόλων A και B.
  $-\{a, b, c, d\} \cap \{a, d, e, j\} = \{a, d\}$
- $A - B$: Διαφορά των συνόλων A και B, περιέχει τα στοιχεία του συνόλου A που δεν ανήκουν στο B.
  $-\{a, b, c, d\} - \{a, d, e, j\} = \{b, c\}$
- Διαμέριση, ενός συνόλου είναι η υποδιαίρεση των στοιχείων του σε ξένα μεταξύ τους μη κενά υποσύνολα ή ΑΛΛΙΩΣ Διαμέριση ενός συνόλου είναι μια συλλογή υποσυνόλων του τέτοια ώστε, κάθε στοιχείο του συνόλου να ανήκει σε ακριβώς ένα υποσύνολο,
  π.χ., το σύνολο $\{\{a, b, x\}, \{d\}, \{c, z\}\}$ είναι μια διαμέριση του συνόλου $\{a, b, c, d, x, z\}$.

Διατεταγμένο ζεύγος, Καρτεσιανό γινόμενο, Δυαδική σχέση

- Διατεταγμένο ζεύγος (a, b) είναι μια διάταξη δύο - όχι απαραίτητα διαφορετικών - στοιχείων a και b.
  Τα (a, b) και (b, a) είναι δύο διαφορετικά διατεταγμένα ζεύγη.
- Καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων S και T - $S \times T$ - είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (x, y) στα οποία $x \in S$ και $y \in T$, π.χ.,
  $-\{a, b, c\} \times \{1, 2\} = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$.
- Μια Δυαδική σχέση μεταξύ των συνόλων S και T είναι ένα υποσύνολο διατεταγμένων ζευγών από το καρτεσιανό γινόμενο $S \times T$, π.χ.,
  – $\{(a, 1), (a, 2), (c, 2)\}$ είναι μια δυαδική σχέση μεταξύ των συνόλων $\{a, b, c\}$ και $\{1, 2\}$.

Διατεταγμένο ζεύγος, Καρτεσιανό γινόμενο, Δυαδική σχέση

- Μια Δυαδική σχέση μεταξύ δύο συνόλων αναπαρίσταται με έναν πίνακα, π.χ., η δυαδική σχέση: $\{(a,1),(a,3),(b,4),(d,2),(d,4)\}$ μεταξύ των συνόλων $\{a,b,c,d\}$ και $\{1,2,3,4,5\}$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

	1	2	3	4	5
a	✓		✓		
b				✓	
c					
d		✓		✓	

- Μια Δυαδική σχέση σε ένα σύνολο S είναι μια δυαδική σχέση μεταξύ του S και του εαυτού του, π.χ., $\{(a,a),(a,c),(b,a),(b,c),(c,b)\}$ είναι μια δυαδική σχέση στο σύνολο $\{a,b,c\}$.

Σχέση ισοδυναμίας

- Μια Δυαδική σχέση σε ένα σύνολο S καλείται "Σχέση ισοδυναμίας" αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:
  1. Κάθε στοιχείο στο σύνολο σχετίζεται με τον εαυτό του (ανακλαστική ιδιότητα).
  2. Για οποιαδήποτε στοιχεία a, b του συνόλου, αν το a σχετίζεται με το b τότε και το b σχετίζεται με το a (συμμετρική ιδιότητα).
  3. Για οποιαδήποτε στοιχεία a, b, c του συνόλου, αν το a σχετίζεται με το b και b σχετίζεται με το c το τότε και το a σχετίζεται με το c (μεταβατική ιδιότητα).

	a	b	c	d	e
a	✓	✓			
b	✓	✓			
c			✓	✓	✓
d			✓	✓	✓
e			✓	✓	✓

	a	b	c	d	e
a	✓	✓			
b		✓			
c				✓	✓
d			✓	✓	
e	✓		✓	✓	✓

- Η δυαδική σχέση αριστερά είναι σχέση ισοδυναμίας, ενώ αυτή στα δεξιά δεν είναι.

Κλάσεις ισοδυναμίας και διαμερίσεις

- Αν έχουμε μια σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο S, μπορούμε να χωρίσουμε τα στοιχεία του S σε κλάσεις - που καλούνται κλάσεις ισοδυναμίας - έτσι ώστε, δύο στοιχεία να ανήκουν στην ίδια κλάση μόνο αν σχετίζονται μεταξύ τους.
  - Κάθε στοιχείο ανήκει σε κάποια κλάση ισοδυναμίας αφού μπορεί να είναι σε τουλάχιστον μία κλάση από μόνο του (λόγω της ανακλαστικής ιδιότητας).
  - Δεν υπάρχει ασάφεια σχετικά με το αν κάποιο στοιχείο ανήκει σε κάποια κλάση ισοδυναμίας (λόγω της συμμετρικής ιδιότητας).
  - Κάθε στοιχείο δε μπορεί να ανήκει σε παραπάνω από μία κλάσεις ισοδυναμίας (λόγω της μεταβατικής ιδιότητας).

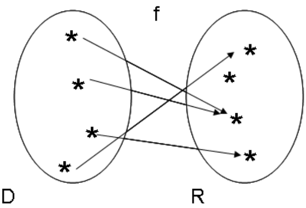
	a	b	c	d	e
a	✓	✓			
b	✓	✓			
c			✓	✓	✓
d			✓	✓	✓
e			✓	✓	✓

Κλάσεις ισοδυναμίας και διαμερίσεις

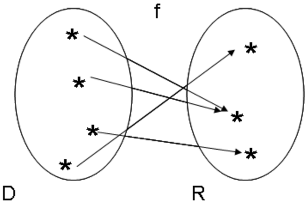
	a	b	c	d	e
a	✓	✓			
b	✓	✓			
c			✓	✓	✓
d			✓	✓	✓
e			✓	✓	✓

- Μια σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο ορίζει μια διαμέριση του συνόλου, στην οποία τα ξένα μεταξύ τους υποσύνολα, είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας, π.χ.,
  – η διαμέριση που ορίζεται από τη σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\{a, b, c, d, e\}$ είναι η $\{\{a, b\}, \{c, d, e\}\}$.
- Δύο στοιχεία είναι ισοδύναμα αν ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας.

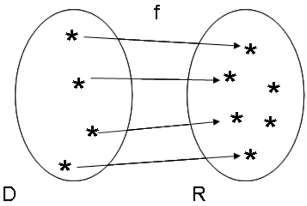
Συναρτήσεις



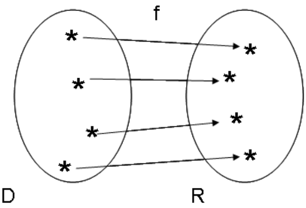
Συνάρτηση



Συνάρτηση «επί»



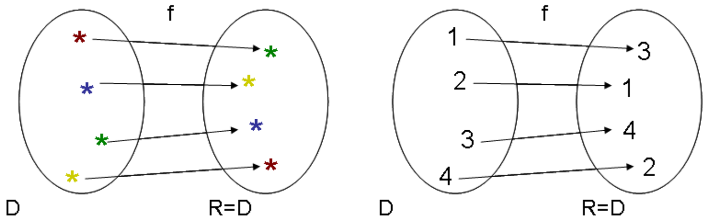
Συνάρτηση 1-1



Συνάρτηση 1-1 και επί
(αντιστοιχία)

Μεταθέσεις

- Μετάθεση, Σύνολο μεταθέσεων G



- Η μετάθεση, που αντιστοιχεί κάθε στοιχείο στον εαυτό του, αφήνει δηλ. τα στοιχεία ως έχουν, λέγεται ταυτοτική.
- Δυαδική σχέση επαγόμενη από σύνολο μεταθέσεων G είναι σχέση ισοδυναμίας.

Μεταθέσεις

- Δίνεται σύνολο $S = \{a, b, \ldots\}$ και ένα σύνολο μεταθέσεων G για τα στοιχεία του S
- Μια Δυαδική σχέση στο S είναι δυαδική σχέση επαγόμενη από το G, όταν ένα στοιχείο a σχετίζεται με ένα στοιχείο b αν και μόνον αν υπάρχει μετάθεση στο G, που απεικονίζει το a στο b.
- Έστω $G = \{\begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ bacd \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ abdc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ badc \end{pmatrix}\}$.
- Η Δυαδική σχέση, που επάγεται από το G φαίνεται στον πίνακα:

	a	b	c	d
a	✓	✓		
b	✓	✓		
c			✓	✓
d			✓	✓

- Η Δυαδική σχέση σε ένα σύνολο, που επάγεται από σύνολο μεταθέσεων G είναι σχέση ισοδυναμίας.

Θεώρημα Burnside

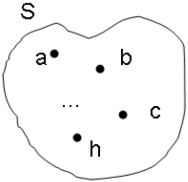
- Ζητούμενο: Πόσες διαφορετικές μορφές, π.χ., χρωματισμοί, στοιχείων ενός συνόλου υπάρχουν, όταν εμφανίζονται ισοδύναμοι σχηματισμοί λόγω συμμετρίας;
- Ιδέα:
  - Πάρε τις ενδεχόμενες μεταθέσεις των στοιχείων του συνόλου.
  - Κάποιες από αυτές είναι ισοδύναμες και φτιάχνουν κλάσεις ισοδυναμίας. Όσες είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας τόσοι είναι και οι διαφορετικοί σχηματισμοί που ψάχνεις.
  - Πόσες είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας, που δημιουργούνται από τις μεταθέσεις;
  - Για να το βρεις μέτρα τα στοιχεία που μένουν ίδια από τις μεταθέσεις, δηλ. στοιχεία, που η μετάθεση τα απεικονίζει στον εαυτό τους, άθροισέ τα και διαίρεσε το άθροισμα με το πλήθος των μεταθέσεων.

Θεώρημα Burnside

- Ζητούμενο: να μετρήσω διαφορετικές μορφές ενός συνόλου (αντικειμένου), όταν αναδιατάσσονται τα στοιχεία (μέρη) του.
- Παρατήρηση: πλήθος κλάσεων ισοδυναμίας = πλήθος διαφορετικών μεταθέσεων
- Διατύπωση: Το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας στις οποίες διαμερίζεται ένα σύνολο S από τη σχέση ισοδυναμίας, που επάγεται από ένα σύνολο μεταθέσεων G του S είναι: $\dfrac{1}{|G|}\displaystyle\sum_{\pi \in G} \psi(\pi)$.
- Εφαρμογή: Δίνεται ένα σύνολο S.
  1. Βρίσκω (εκτός αν δίνεται) το σύνολο μεταθέσεων G.
  2. Σε κάθε μετάθεση στο G βρίσκω το πλήθος των στοιχείων που δεν αλλάζουν.
  3. Τα αθροίζω για όλες τις μεταθέσεις και διαιρώ το άθροισμα με το πλήθος των μεταθέσεων $|G|$ και έχω το ζητούμενο.

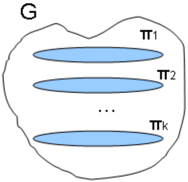
Θεώρημα Burnside: Απόδειξη

- Έστω σύνολο S και σύνολο μεταθέσεων G στοιχείων του S.
- Πόσα στοιχεία του S μένουν ίδια συνολικά σε όλες τις μεταθέσεις του G; Υπάρχουν δύο τρόποι να τα μετρήσουμε: είτε ανά στοιχείο είτε ανά μετάθεση:



n(s): πλήθος μεταθέσεων που αφήνουν ένα στοιχείο s ίδιο.
Για όλα τα στοιχεία του S:

$$\sum_{s \in S} n(s)$$



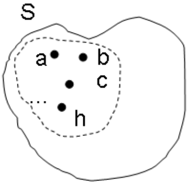
y(π): πλήθος στοιχείων που αφήνει ίδια μια μετάθεση π.
Για όλα τα στοιχεία του G:

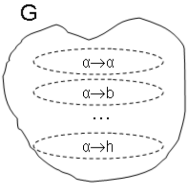
$$\sum_{\pi \in G} y(\pi)$$

- Προφανώς: $\sum_{s \in S} n(s) = \sum_{\pi \in G} y(\pi)$.

Θεώρημα Burnside: Απόδειξη

- Έστω στοιχεία α και b του S που είναι ισοδύναμα $\Rightarrow$ υπάρχει μετάθεση στο G με $\alpha \to b$. Πόσε τέτοιες μεταθέσεις υπάρχουν;
- Όσες - $n(\alpha)$ - αφήνουν το στοιχείο α ίδιο, δηλ., περιέχουν $\alpha \to \alpha$, αφού για κάθε μία μπορούμε να έχουμε $\alpha \to b$ ως εξής: $\alpha \to \alpha \to b$.
- Για τον ίδιο λόγο $n(\alpha)$ είναι και οι μεταθέσεις με $\alpha \to c$ ...$\alpha \to h$, για κάθε άλλο στοιχείο στην ίδια κλάση ισοδυναμίας με το α.





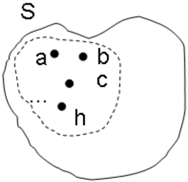
Θεώρημα Burnside: Απόδειξη

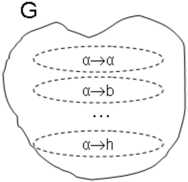
- Οι μεταθέσεις του G μπορούν να ομαδοποιηθούν σε αυτές, που αφήνουν το α ίδιο, αυτές με $\alpha \to b$, αυτές με $\alpha \to c$... για κάθε στοιχείο της κλάσης ισοδυναμίας, που περιέχει το α.
- Κάθε μία από τις ομάδες αυτές περιέχει $n(\alpha)$ μεταθέσεις, όπως δείξαμε πριν, δηλ., $n(\alpha) = n(b) = ... = n(h)$.
- Άρα,

$$n(a) * \# \text{ στοιχείων στην κλ. ισοδυναμίας που περιέχει το } a = |G|$$

$$\Rightarrow$$

$$n(a) = \frac{|G|}{\# \text{ στοιχείων στην κλάση ισοδυναμίας που περιέχει το } a}$$





Θεώρημα Burnside: Απόδειξη

- Οπότε, για όλα τα στοιχεία στην κλάση ισοδυναμίας είναι:
$$\sum_{\text{όλα τα } s \text{ στην κλάση ισοδυναμίας.}} n(s) = |G|$$
- Και για όλες τις κλάσεις ισοδυναμίας, δηλ., όλα τα στοιχεία του S:

$$\Rightarrow$$

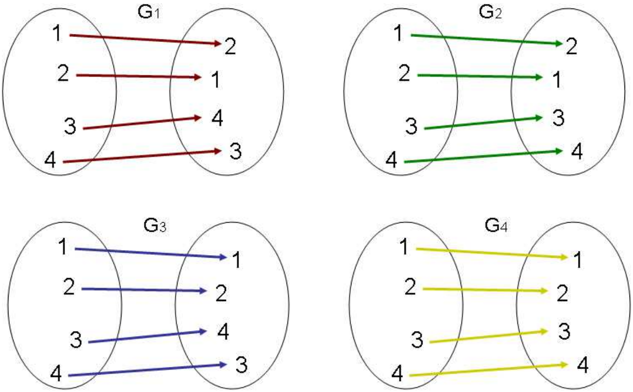
$$\#\text{κλάσεων ισοδυναμίας στις οποίες χωρίζεται το } S = \frac{\sum_{s \in S} n(s)}{|G|}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\#\text{κλάσεων ισοδυναμίας στις οποίες χωρίζεται το } S = \frac{\sum_{\pi \in G} y(\pi)}{|G|}$$

, αφού $\sum_{s \in S} n(s) = \sum_{\pi \in G} y(\pi)$.

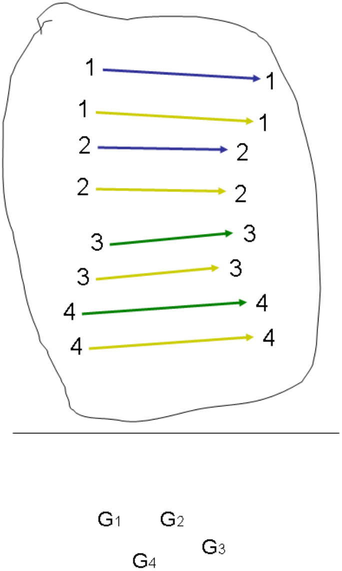
Θεώρημα Burnside



	1	2	3	4
1	✓	✓		
2	✓	✓		
3			✓	✓
4			✓	✓

Θεώρημα Burnside

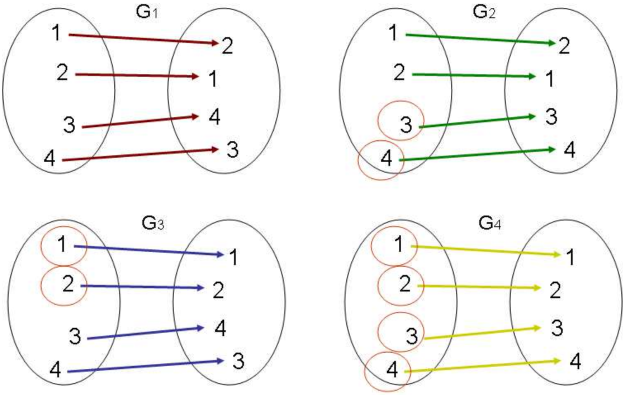
	1	2	3	4
1	✓	✓		
2	✓	✓		
3			✓	✓
4			✓	✓



Θεώρημα Burnside: Απόδειξη

- Το να μετρήσω τα συνολικά στοιχεία, που μένουν ίδια για όλες τις μεταθέσεις είναι σαν να μετράω για κάθε στοιχείο του δοσμένου συνόλου το πλήθος
  των μεταθέσεων, που δεν το αλλάζουν (δηλ., το απεικονίζουν στον εαυτό του).
- Αν έχουμε δύο στοιχεία a και b στην ίδια κλάση ισοδυναμίας, υπάρχουν τόσες μεταθέσεις, που απεικονίζουν το a στο b όσες είναι οι μεταθέσεις, που αφήνουν το a ίδιο (δηλ., το απεικονίζουν στον εαυτό του). Γιατί;

Θεώρημα Burnside



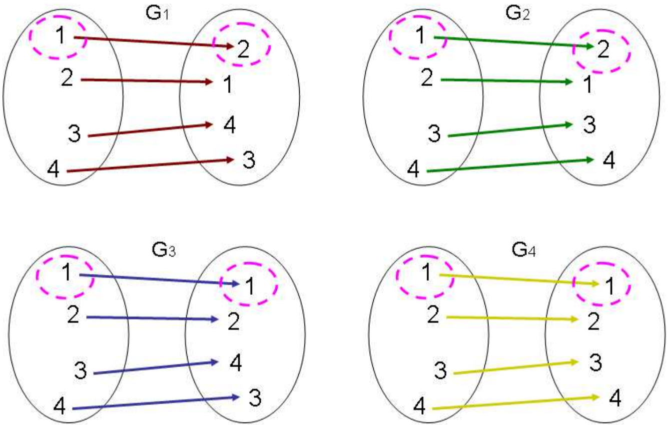
1 G_3 G_4

2 G_3 G_4

3 G_2 G_4

4 G_2 G_4

Θεώρημα Burnside

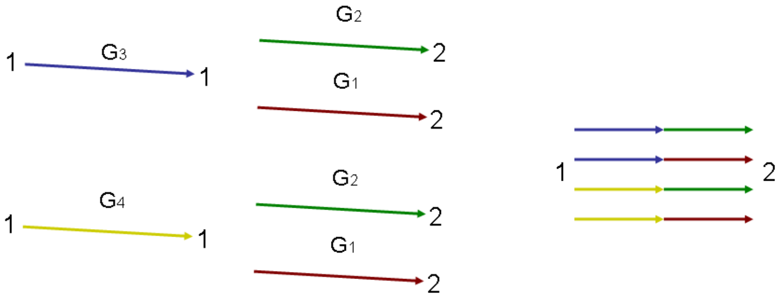


	1	2	3	4
1	✓	✓		
2	✓	✓		
3			✓	✓
4			✓	✓

Θεώρημα Burnside: Απόδειξη

- Αν έχουμε δύο στοιχεία a και b στην ίδια κλάση ισοδυναμίας, υπάρχουν τόσες μεταθέσεις, που απεικονίζουν το a στο b όσες είναι οι μεταθέσεις, που αφήνουν το a ίδιο (δηλ., το απεικονίζουν στον εαυτό του). Γιατί;
  - Αφού τα a και b είναι ισοδύναμα, υπάρχει τουλάχιστον μία μετάθεση, που απεικονίζει το a στο b.
  - Κοίτα τώρα συνολικά τις μεταθέσεις, που αφήνουν το a ως έχει.
  - Μπορώ να φτιάξω ένα σύνολο μεταθέσεων, που απεικονίζουν το a στο b ως εξής: κάνω πρώτα κάποια από τις μεταθέσεις, που αφήνουν το a ως έχει και μετά τη μετάθεση, που απεικονίζει το a στο b. Οι μεταθέσεις στο σύνολο αυτό:
    – είναι μεταθέσεις, που απεικονίζουν το a στο b,
    – είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους, γιατί αν δεν ήταν και τις έκανα αντίστροφα θα έδιναν δυο διαφορετικές μορφές για το ίδιο στοιχείο a
    – αυτές είναι οι μόνες δυνατές μεταθέσεις, που απεικονίζουν το a στο b.

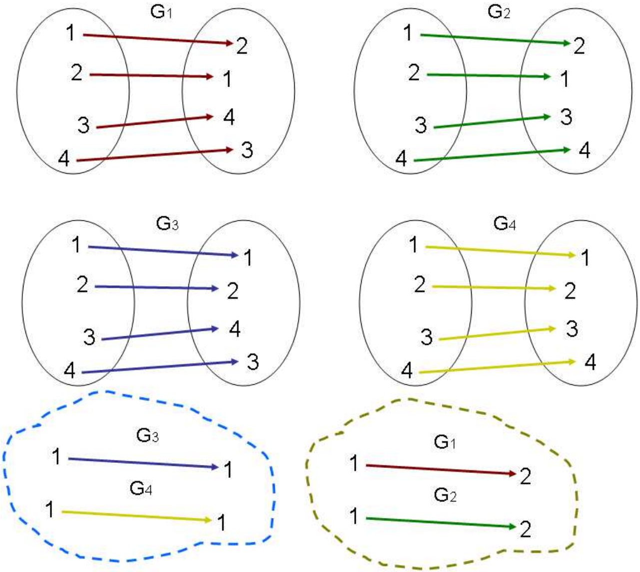
Θεώρημα Burnside



Θεώρημα Burnside: Απόδειξη

- Το να μετρήσω τα συνολικά στοιχεία που μένουν ίδια για όλες τις μεταθέσεις είναι σαν να μετράω για κάθε στοιχείο του δοσμένου συνόλου το πλήθος των μεταθέσεων που δεν το αλλάζουν (δηλ., το απεικονίζουν στον εαυτό του).
- Αν έχουμε δύο στοιχεία a και b στην ίδια κλάση ισοδυναμίας, υπάρχουν τόσες μεταθέσεις, που απεικονίζουν το a στο b όσες είναι συνολικά οι μεταθέσεις, που αφήνουν το a ίδιο (δηλ., το απεικονίζουν στον εαυτό του). Γιατί;
- Κοιτάω τώρα τα στοιχεία του S, που είναι σε μία κλάση ισοδυναμίας: $\{a, b, c, ..., h\}$.
- Ομαδοποιώ τις μεταθέσεις του G σε αυτές, που απεικονίζουν το a στο a, το a στο b, το a στο c, ..., το a στο h.
- Όπως ήδη δείξαμε σε κάθε μια από αυτές τις ομάδες υπάρχουν τόσες μεταθέσεις όσες είναι συνολικά οι μεταθέσεις, που αφήνουν το a ίδιο (δηλ., το απεικονίζουν στον εαυτό του), τις οποίες συμβολίζω $n(a)$.

Θεώρημα Burnside



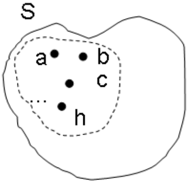
Θεώρημα Burnside: Απόδειξη

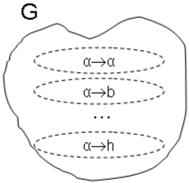
- Οι μεταθέσεις του G μπορούν να ομαδοποιηθούν σε αυτές, που αφήνουν το α ίδιο, αυτές με $\alpha \rightarrow b$, αυτές με $\alpha \rightarrow c$... για κάθε στοιχείο της κλάσης ισοδυναμίας, που περιέχει το α.
- Κάθε μία από τις ομάδες αυτές περιέχει $n(\alpha)$ μεταθέσεις, όπως δείξαμε πριν.
- Άρα:

$$n(a) * \# \text{ στοιχείων στην κλ. ισοδυναμίας που περιέχει το } a = |G|$$

$$\Rightarrow$$

$$n(a) = \frac{|G|}{\# \text{ στοιχείων στην κλάση ισοδυναμίας που περιέχει το } a}$$





Θεώρημα Burnside: Απόδειξη

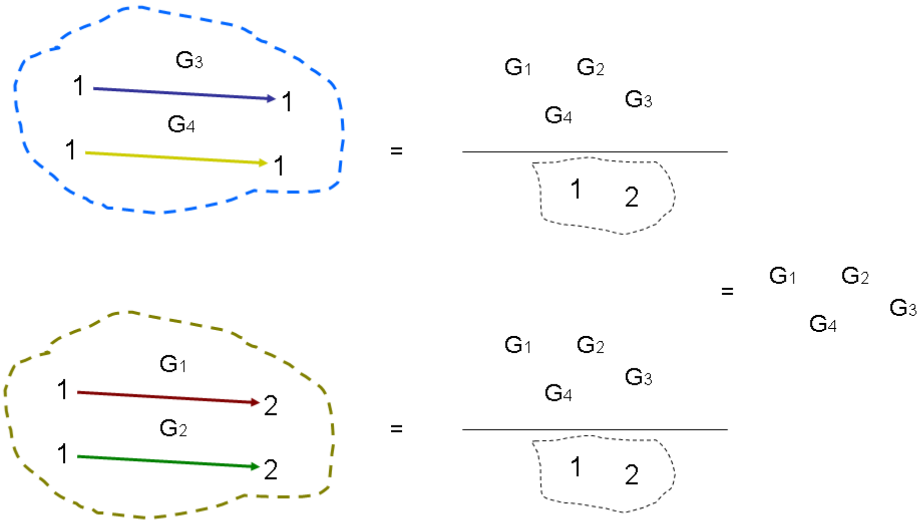
- Δηλ.,

$$n(a) = \frac{|G|}{\#\text{ στοιχείων στην κλάση ισοδυναμίας που περιέχει το } a}$$

- Κάνω το παραπάνω για κάθε στοιχείο $b, c, \ldots, h$, οπότε: $n(a) + n(b) + \ldots + n(h) = |G|$. Επομένως, για κάθε κλάση ισοδυναμίας στο S είναι:
$$\sum_{\text{όλα τα } s \text{ στην κλάση ισοδυναμίας}} n(s) = |G|$$
- Άρα, για όλο το S ισχύει:

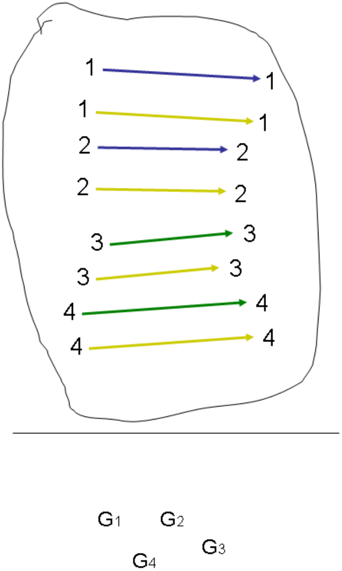
$$\sum_{s \in S} n(s) = \#\text{κλάσεων ισοδυναμίας στις οποίες χωρίζεται το } S \cdot |G|$$

Θεώρημα Burnside



Θεώρημα Burnside

	1	2	3	4
1	✓	✓		
2	✓	✓		
3			✓	✓
4			✓	✓



Παράδειγμα

Δίνεται σύνολο $S = \{a, b, c, d\}$ και σύνολο μεταθέσεων $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$, με $\pi_1 = \begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} abcd \\ bacd \end{pmatrix}$, $\pi_3 = \begin{pmatrix} abcd \\ abdc \end{pmatrix}$, $\pi_4 = \begin{pmatrix} abcd \\ badc \end{pmatrix}$. Πόσοι διαφορετικοί σχηματισμοί υπάρχουν στο S λόγω του G;

Περιμένουμε να βρούμε δύο διαφορετικούς σχηματισμούς, αφού 2 είναι και οι κλάσεις ισοδυναμίας στο S, λόγω του G:

	a	b	c	d
a	✓	✓		
b	✓	✓		
c			✓	✓
d			✓	✓

Στη μετάθεση π_1 μένουν ίδια 4 στοιχεία, στην π_2 2, στην π_3 2 και στην π_4 0 στοιχεία. Συνολικά, υπάρχουν 4 μεταθέσεις στο G. Οπότε το πλήθος κλάσεων ισοδυναμίας είναι: $\frac{1}{4}(4 + 2 + 2 + 0) = 2$.

Πόσα διαφορετικά βραχιολάκια που να έχουν 2 χάντρες μπλε και κίτρινες, μπορούμε να φτιάξουμε όταν οι χάντρες μπορούν να περιστρέφονται;

Δύο βραχιολάκια είναι τα ίδια αν περιστρέφοντας το ένα προκύπτει το άλλο.

- Οι πιθανές δυάδες από χάντρες είναι οι: bb, by, yb, yy.
- Οι δυνατές μεταθέσεις - να μείνουν ως έχουν ή να εναλλαγούν τα άκρα τους - είναι 2:
$$\pi_1 = \begin{pmatrix} bb, by, yb, yy \\ bb, by, yb, yy \end{pmatrix}, \; \pi_2 = \begin{pmatrix} bb, by, yb, yy \\ bb, yb, by, yy \end{pmatrix}$$
- Στην π_1 υπάρχουν 4 στοιχεία αναλλοίωτα.
- Στην π_2 υπάρχουν 2 στοιχεία αναλλοίωτα.
- Άρα, οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι: $\frac{1}{2}(4+2) = 3$.

Πόσα διαφορετικά βραχιολάκια που να έχουν 3 χάντρες μπλε και κίτρινες, μπορούμε να φτιάξουμε όταν οι χάντρες μπορούν να περιστρέφονται;

Δύο βραχιολάκια είναι τα ίδια αν περιστρέφοντας το ένα προκύπτει το άλλο.

- Οι πιθανές τριάδες από χάντρες είναι οι: $bbb, bby, byb, byy, ybb, yby, yyb, yyy$.
- Οι δυνατές μεταθέσεις - να μείνουν ως έχουν ή να εναλλαγούν τα άκρα τους - είναι 2:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} bbb, bby, byb, byy, ybb, yby, yyb, yyy \\ bbb, bby, byb, byy, ybb, yby, yyb, yyy \end{pmatrix},$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} bbb, bby, byb, byy, ybb, yby, yyb, yyy \\ bbb, ybb, byb, yyb, bby, yby, byy, yyy \end{pmatrix}$$

- Στην π_1 υπάρχουν 8 στοιχεία αναλλοίωτα.
- Στην π_2 υπάρχουν 4 στοιχεία αναλλοίωτα.
- Άρα οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι: $\frac{1}{2}(8+4) = 6$.