Με πόσους τρόπους μπορώ να βάλω n άτομα να καθίσουν σε κύκλο;

- Υπάρχουν $n!$ μεταθέσεις για τα n άτομα αν δε λάβουμε υπόψη τις συμμετρίες.
- Υπάρχουν $G = \{\pi_1, ...\pi_n\}$ μεταθέσεις: π_1, η ταυτοτική και κάθε μία από τις επόμενες προκύπτει από την προηγούμενη με μετατόπισή της κατά μία θέση κατά τη φορά του ρολογιού.
- Στην π_1 μένουν ίδιες όλες οι θέσεις, δηλ., $n!$ στοιχεία. Σε κάθε μια από τις υπόλοιπες μεταθέσεις καμία θέση δε μένει η ίδια, άρα αναλλοίωτα μένουν 0 στοιχεία.
- Άρα, ο συνολικός αρθμός των κλάσεων ισοδυναμίας είναι $\frac{1}{n}(n! + 0 + ... + 0) = (n-1)!$.

Θέλω να τυπώσω 5-ψήφια νούμερα σε χαρτάκια, ένα κάθε χαρτάκι. Πόσα διαφορετικά χαρτάκια πρέπει να τυπώσω για να έχω όλα τα νούμερα;

- Υπάρχουν 10^5 διαφορετικά 5-ψήφια νούμερα αν δε λάβουμε υπόψη τις συμμετρίες.
- Πόσες μεταθέσεις υπάρχουν στο σύνολο G;
  - Τα ψηφία 0,1,6,8,9 είναι ίδια αν τα διαβάσω 'πάνω κάτω' και 'δεξιά και πάνω' (π.χ., 89166 - 99168).
- Οπότε είναι $G = \{\pi_1, \pi_2\}$

  π_1: ταυτοτική μετάθεση - αφήνει όλα τα νούμερα, όπως είναι - μένουν ίδια 10^5 στοιχεία.

  π_2: αφήνει τον αριθμό ίδιο, όταν δε μπορεί να διαβαστεί 'πάνω κάτω' ($13765 \to 13765$) και κάνει τον αριθμό ίδιο με τον αντίστοιχο όταν μπορεί να διαβαστεί ανάποδα (π.χ., $89166 \to 99168$). Εδώ, μένουν ίδια $(10^5 - 5^5) + 3 \cdot 5^2$ στοιχεία. Γιατί;
- Άρα, ο συνολικός αρθμός των κλάσεων ισοδυναμίας είναι $\frac{1}{2}(10^5 + 10^5 - 5^5 + 3 \cdot 5^2)$.

Θέλω να τυπώσω 5-ψήφια νούμερα σε χαρτάκια, ένα κάθε χαρτάκι. Πόσα διαφορετικά χαρτάκια πρέπει να τυπώσω για να έχω όλα τα νούμερα;

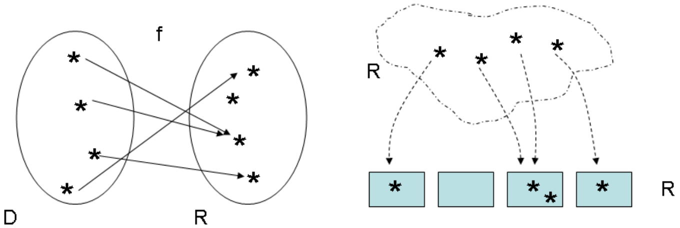
- Τα ψηφία 2,3,4,5,7 δε μπορούν να διαβαστούν ανάποδα και μπορούν να δώσουν 5^5 πενταψήφιους.
- Για να διαβάζονται πενταψήφιοι ίδια είτε πάνω κάτω είτε δεξιά και πάνω πρέπει:
  – το μεσαίο ψηφίο να είναι 0,1,8 (3 επιλογές).
  – το πρώτο ψηφίο πρέπει να είναι το τελευταίο γυρισμένο ανάποδα: 0,1,8,6,9 (5 επιλογές).
  – το δεύτερο ψηφίο πρέπει να είναι το τέταρτο γυρισμένο ανάποδα: 0,1,8,6,9 (5 επιλογές).

Μπορώ καλύτερα…;;;

- Θεώρημα Burnside βοηθάει πολύ, αφού αντί να μετράω κλάσεις ισοδυναμίας κοιτάω τις μεταθέσεις και μετράω μόνο τα στοιχεία, που οι μεταθέσεις αφήνουν αναλλοίωτα… ΑΛΛΑ
  - Πάλι μετράω ‘‘πολλά’’ στοιχεία και η διαδικασία παραμένει πολύπλοκη…
  - Εκτός από το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας δε μπορώ να έχω πληροφορία και για άλλες ιδιότητες ισοδύναμων στοιχείων.
    –π.χ., αν θέλαμε να βρούμε τον αριθμό από διαφορετικές σκακιέρες που να έχουν 2 πράσινα και 2 άσπρα τετραγωνάκια; Το θεώρημα Burnside δε βοηθάει…

Ιδέα...

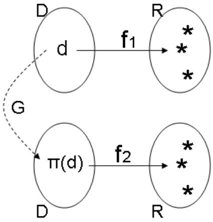
- f: τρόπος να ρίξω $|D|$ αντικείμενα σε $|R|$ κουτιά.



- πλήθος f από $D \to R$: πλήθος τρόπων να ρίξω $|D|$ αντικείμενα σε $|R|$ κουτιά.

Κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων

- Έστω D και R σύνολα και G σύνολο μεταθέσεων των στοιχείων του D.
- Ορίζουμε την εξής διμελή σχέση στο σύνολο των συναρτήσεων από το D στο R: f_1, f_2 σχετίζονται αν $f_1(d) = f_2(\pi(d)), \forall d \in D$, που είναι σχέση ισοδυναμίας.



- Επομένως, οι συναρτήσεις από $D \to R$ χωρίζονται σε κλάσεις ισοδυναμίας, που καλούνται πρότυπα (patterns): αντιστοιχούν σε διαφορετικούς τρόπους να μοιράσω $|D|$ αντικείμενα σε $|R|$ κουτιά, όταν η ισοδυναμία μεταξύ των μοιρασμάτων καθορίζεται από το G.

Παράδειγμα

- Έστω $D = \{a, b, c, d\}$, $R = \{x, y\}$ και σύνολο μεταθέσεων $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$, με $\pi_1 = \begin{pmatrix} abcd \\ bcda \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} abcd \\ cdab \end{pmatrix}$, $\pi_3 = \begin{pmatrix} abcd \\ dabc \end{pmatrix}$, $\pi_4 = \begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}$.
- Οι 16 συναρτήσεις $f : D \to R$ είναι οι εξής:

	f(a)	f(b)	f(c)	f(d)
f(1)	x	x	x	x
f(2)	y	x	x	x
f(3)	x	y	x	x
f(4)	x	x	y	x
f(5)	x	x	x	y
f(6)	y	y	x	x
f(7)	y	x	y	x
f(8)	y	x	x	y
f(9)	x	y	y	x
f(10)	x	y	x	y
f(11)	x	x	y	y
f(12)	y	y	y	x
f(13)	y	y	x	y
f(14)	y	x	y	y
f(15)	x	y	y	y
f(16)	y	y	y	y

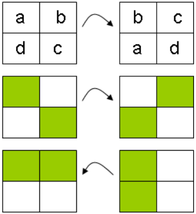
Παράδειγμα

- Έστω $D = \{a, b, c, d\}$, $R = \{x, y\}$ και σύνολο μεταθέσεων $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$, με $\pi_1 = \begin{pmatrix} abcd \\ bcda \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} abcd \\ cdab \end{pmatrix}$, $\pi_3 = \begin{pmatrix} abcd \\ dabc \end{pmatrix}$, $\pi_4 = \begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}$.
- Οι 16 συναρτήσεις $f : D \to R$ είναι οι εξής:

	f(a)	f(b)	f(c)	f(d)
f(1)	x	x	x	x
f(2)	y	x	x	x
f(3)	x	y	x	x
f(4)	x	x	y	x
f(5)	x	x	x	y
f(6)	y	y	x	x
f(7)	y	x	y	x
f(8)	y	x	x	y
f(9)	x	y	y	x
f(10)	x	y	x	y
f(11)	x	x	y	y
f(12)	y	y	y	x
f(13)	y	y	x	y
f(14)	y	x	y	y
f(15)	x	y	y	y
f(16)	y	y	y	y

Ξανά το θέμα με τις σκακιέρες...

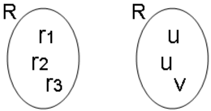
- Ονομάζω τα κουτάκια της σκακιέρας.
- Έχω δύο χρώματα: άσπρο (x)-πράσινο (y)
- Οπότε $D = \{a, b, c, d\}$, $R = \{x, y\}$
- $f : D \to R$ δείχνει τη σκακιέρα
- Το σύνολο μεταθέσεων, που προκύπτουν με περιστροφή των cells είναι:
$$G = \{\begin{pmatrix} abcd \\ bcda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ cdab \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ dabc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}\}.$$



- Ακριβώς, το προηγούμενο παράδειγμα. Υπάρχουν 6 κλάσεις ισοδυναμίας, δηλ., 6 διαφορετικοί σχηματισμοί 2 χρωμάτων.

Ανάθεση βαρών στα στοιχεία του R

- Μέχρι εδώ: μετρήσαμε τον αριθμό κλάσεων ισοδυναμίας συναρτήσεων.
- Θέλουμε ΚΑΙ: πληροφορία για ιδιότητες συναρτήσεων στις κλάσεις ισοδυναμίας.
- Τι κάνουμε; Αναθέτουμε ‘‘βάρη’’ (που μπορεί να είναι αριθμοί ή σύμβολα) στα στοιχεία του R.



- $r_1 + r_2 + r_3$ σημαίνει ότι κάποιο στοιχείο του D μπορεί να πάρει ‘‘βάρος ’’ r_1 ή r_2 ή r_3.
- Αν έχουμε 2 στοιχεία με ‘‘βάρος ’’ u και 1 στοιχείο με ‘‘βάρος ’’ v στο R σημαίνει ότι κάποιο στοιχείο του D μπορεί να διαλέξει στοιχεία τύπου u ή τύπου v.
- Χοντρικά, με αυτόν τον τρόπο γενικεύεται η έννοια των γεννητριών συναρτήσεων.

Ανάθεση βαρών στα στοιχεία του R

- Το βάρος μιας συνάρτησης $f : D \to R$ είναι το γινόμενο των βαρών των εικόνων των στοιχείων του D στο R: $\sum_{d \in D} w(f(d))$.
- Το βάρος ενός συνόλου συναρτήσεων από $D \to R$ είναι το άθροισμα των βαρών τους.
- Άρα: το βάρος μιας συνάρτησης δείχνει πώς (τον τρόπο) $|D|$ αντικείμενα ρίχνονται σε $|R|$ κουτιά.
- Το βάρος ενός συνόλου συναρτήσεων δείχνει τους τρόπους (το πλήθος των τρόπων), που κατανέμονται τα αντικείμενα.
- Συναρτήσεις στην ίδια κλάση ισοδυναμίας έχουν το ίδιο βάρος, που καλείται βάρος προτύπου, δηλ. βάρος της κλάσης ισοδυναμίας. (Φυσικά, μπορεί συναρτήσεις με το ίδιο βάρος να μην ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας.)

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε 3 μπάλες, όταν έχουμε 3 χρώματα: ακριβό κόκκινο, φθηνό κόκκινο και μπλε;

- $D = \{\text{οι τρεις μπάλες}\}$
- $R = \{\text{τα τρία χρώματα}\}$
  - r_1: βάρος ακριβού κόκκινου χρώματος
  - r_2: βάρος φθηνού κόκκινου χρώματος
  - b: βάρος μπλε χρώματος
- $r_1 + r_2 + b$: τρόποι που μπορεί να χρωματιστεί μια μπάλα με r_1 ή με r_2 ή με b
- $(r_1 + r_2 + b)^3$: τρόποι, που μπορούν να χρωματιστούν και οι 3 μπάλες και είναι το συνολικό βάρος της $f : D \to R$
- $(r_1 + r_2 + b)^3 =$ $r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 + 3r_1^2 r_2 + 3r_1 r_2^2 + 3r_1^2 b + 3r_2^2 b + 3r_1 b^2 + 3r_2 b^2 + 3r_1 r_2 b$
- Το παραπάνω έχει όλη την πληροφορία για τους διαφορετικούς τρόπους, που μπορούμε να χρωματίσουμε τις 3 μπάλες.
- $3r_1 r_2^2$: υπάρχουν 3 τρόποι να χρωματίσουμε 1 μπάλα με ακριβό κόκκινο χρώμα και 2 με φθηνό κόκκινο χρώμα.

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε 3 μπάλες, όταν έχουμε 3 χρώματα: ακριβό κόκκινο, φθηνό κόκκινο και μπλε;

- Αν δε μάς ενδιαφέρει η διάκριση μεταξύ των κόκκινων χρωμάτων, θέτουμε $w(r_1) = w(r_2) = r$, οπότε έχουμε $(r + r + b)^3 = (2r + b)^3 = \ldots$
- $2r + b$: υπάρχουν 2 τρόποι να χρωματίσουμε μια μπάλα κόκκινη και 1 τρόπος να την κάνουμε μπλε.

8 άτομα θέλουν να πάνε ταξίδι σε 3 πόλεις. 3 από τα 8 άτομα ανήκουν στην ίδια οικογένεια, και 2 από τα 8 άτομα ανήκουν, επίσης, σε μια άλλη οικογένεια. Άτομα στην ίδια οικογένεια πρέπει να πάνε ταξίδι μαζί. Με πόσους τρόπους τα 8 άτομα μπορούν να κανονίσουν το ταξίδι τους;

- $D = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, τα άτομα
  – a, b, c μία οικογένεια, d, e άλλη οικογένεια
- $R = \{c_1, c_2, c_3\}$, οι πόλεις με βάρη A, B, Γ
- Για τους a, b, c, τα διαφορετικά ταξίδια, που μπορούν να κάνουν είναι $A^3 + B^3 + \Gamma^3$, αφού πρέπει να πάνε μαζί είτε στην πόλη c_1 είτε στη c_2 είτε στη c_3.
- Αντίστοιχα, για τους d, e είναι $A^2 + B^2 + \Gamma^2$
- Για τους f, g, h είναι $A + B + \Gamma$
- Συνολικά οι τρόποι είναι:
  $(A^3 + B^3 + \Gamma^3)(A^2 + B^2 + \Gamma^2)(A + B + \Gamma)^3$

Προχωρώντας...

Στόχος: να βρω το βάρος όλων των κλάσεων ισοδυναμίας συναρτήσεων από $D \to R$.

Έχω μια μετάθεση π.χ., $\pi = \begin{pmatrix} abcdef \\ cedabf \end{pmatrix}$.

- Τα στοιχεία $a \to c, c \to d, d \to a$ σχηματίζουν κύκλο, οπότε $\{a, c, d\}$ είναι ένας κύκλος στην π με μήκος 3, δηλ. με 3 στοιχεία.
- Άλλος κύκλος: $b \to e, e \to b$, $\{e, b\}$ είναι ένας κύκλος στην π με μήκος 2.
- $x_{\text{βάρος}}^{\text{πλήθος}}$: για την π έχουμε x_3^1, x_2^1
- Όταν πω με τέτοιο συμβολισμό πόσοι κύκλοι υπάρχουν σε μια μετάθεση π έχω μια αναπαράσταση δομής κύκλου της π.

Προχωρώντας...

- Αν μάς δώσουν ένα σύνολο μεταθέσεων G ορίζουμε το δείκτη κύκλου P_G του G σαν το άθροισμα των κυκλικών αναπαραστάσεων των μεταθέσεων του G διά το πλήθος των μεταθέσεων του G: $P_G = \dfrac{\sum\limits_{\pi \in G} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_k^{b_k}}{|G|}$.

Παράδειγμα

Δίνεται το $G = \left\{ \begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ bacd \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ abdc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ badc \end{pmatrix} \right\}$.

- Έχουμε 4 μεταθέσεις: $|G| = 4$
- $\pi_1 : x_1^4$
- $\pi_2 : x_1^2 x_2$
- $\pi_3 : x_1^2 x_2$
- $\pi_4 : x_2^2$
- Οπότε: $P_G = \dfrac{x_1^4 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2 + x_2^2}{4} = \dfrac{x_1^4 + x_2^2 + 2x_1^2 x_2}{4}$

Θεώρημα Pólya

- Δεδομένα: σύνολα D, R, συναρτήσεις $f : D \to R$, σύνολο μεταθέσεων G, βάρη στοιχείων του R.
- Ζητούμενο: το συνολικό βάρος των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων f.
- Διατύπωση: Ο κατάλογος των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού D και σύνολο τιμών R είναι:

$$P_G\left(\sum_{r\in R} w(r), \sum_{r\in R}[w(r)]^2, \ldots, \sum_{r\in R}[w(r)]^k, \ldots\right)$$

, δηλαδή ο κατάλογος των προτύπων προκύπτει αντικαθιστώντας το x_1 με $\sum_{r\in R} w(r)$, το x_2 με $\sum_{r\in R}[w(r)]^2$, ..., το x_k με $\sum_{r\in R}[w(r)]^k$,... στην έκφραση του δείκτη κύκλων P_G του συνόλου μεταθέσεων G.

Θεώρημα Pólya

- Δεδομένα: σύνολα D, R, συναρτήσεις $f : D \to R$, σύνολο μεταθέσεων G, βάρη στοιχείων του R.
- Ζητούμενο: το συνολικό βάρος των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων f.
- Εφαρμογή:
  1. Βρίσκω κύκλους στα $\pi \in G$
  2. Φτιάχνω το P_G
  3. Σε κάθε όρο του P_G αντικαθιστώ το:

  – x_1 με $w(r_1) + w(r_2) + ..., \forall r_i \in R$

  – x_2 με $w^2(r_1) + w^2(r_2) + ..., \forall r_i \in R$

  – κοκ.

Ποιο είναι το πλήθος των διαφορετικών βραχιολιών με χάντρες, μπλε και κίτρινες;

Ισοδύναμα είναι βραχιόλια, που προκύπτουν από εναλλαγή των άκρων τους.

- $D = \{1, 2, 3\}$, οι χάντρες
- $R = \{b, y\}$, τα χρώματα με $w(b) = b, w(y) = y$.
- Έχουμε τις εξής μεταθέσεις: $\pi_1 = \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}$ και $\pi_2 = \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}$, δηλ. $|G| = 2$.
- Στη μετάθεση π_1 υπάρχουν 3 κύκλοι μήκους 1, δηλ. x_1^3.
- Στη μετάθεση π_2 υπάρχουν 1 κύκλος μήκους 1 και 1 κύκλος μήκους 2, δηλ. $x_1^1 x_2^1$.
- Οπότε: $P_G = \dfrac{x_1^3 + x_2 x_1}{2}$.

Ποιο είναι το πλήθος των διαφορετικών βραχιολιών με χάντρες, μπλε και κίτρινες;

Ισοδύναμα είναι βραχιόλια, που προκύπτουν από εναλλαγή των άκρων τους.

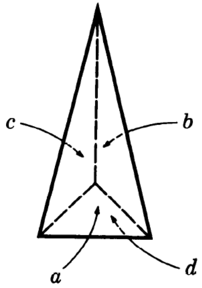
- Έχουμε 2 χρώματα με βάρη b, y, οπότε:
- Οπότε:
  $$P_G = \frac{(b+y)^3 + (b^2+y^2)(b+y)}{2} = b^3 + 2b^2y + 2by^2 + y^3$$
- Θέτοντας $b = y = 1$ έχουμε: $1+2+2+1 = 6$ τρόποι, δηλ. διαφορετικά βραχιόλια.

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις πλευρέ μιας πυραμίδας με 2 χρώματα;

Η βάση της πυραμίδας παραμένει σταθερή και οι συμμετρίες προκύπτουν μετά από περιστροφή της γύρω από τον κατακόρυφο άξονα.

- $D = \{a, b, c, d\}$, οι πλευρές
- $R = \{x, y\}$, τα χρώματα με $w(x) = x, w(y) = y$
- Έχουμε τις εξής μεταθέσεις: $\pi_1 = \begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} abcd \\ bcad \end{pmatrix}$ και $\pi_3 = \begin{pmatrix} abcd \\ cabd \end{pmatrix}$, δηλ. $|G| = 3$.
- Για την π_1 είναι: x_1^4
- Για την π_2 είναι: $x_1^1 x_3^1$
- Για την π_3 είναι: $x_1^1 x_3^1$
- Οπότε: $P_G = \dfrac{x_1^4 + x_1^1 x_3^1 + x_1^1 x_3^1}{3} = \dfrac{x_1^4 + 2x_1^1 x_3^1}{3}$

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις πλευρές μιας πυραμίδας με 2 χρώματα;



Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις πλευρές μιας πυραμίδας με 2 χρώματα;

- Έχουμε 2 χρώματα με βάρη x, y, οπότε:
- Οπότε: $P_G = \dfrac{(x+y)^4 + 2(x+y)(x^3+y^3)}{3} =$ $x^4 + y^4 + 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3$
- Θέτοντας $x = y = 1$ έχουμε: $1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 8$ τρόποι, δηλ. διαφορετικοί χρωματισμοί.

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις όψεις εν κύβου με 3 χρώματα;

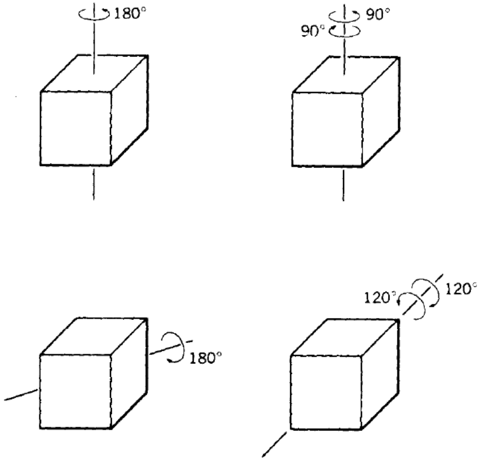
- $D = \{a, b, c, d, e, f\}$, οι πλευρές
- $R = \{c_1, c_2, c_3\}$, τα χρώματα με $w(c_i) = i, 1 \leq i \leq 3$
- Αριθμούμε τις όψεις του κύβου ως εξής: 1 την πάνω, 2 την κάτω, 3,4,5,6 τις πλαϊνές κατά τη φορά του ρολογιού. Οι συμμετρίες στον κύβο είναι οι εξής:

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις όψεις εν κύβου με 3 χρώματα;

- Να αφήσω τον κύβο, όπως είναι: (1)(2)(3)(4)(5)(6). Με κυκλική αναπαράσταση: x_1^6.
- Να κάνω περιστροφές 180^o γύρω από τον άξονα που ενώνει μέσα απέναντι όψεων: (1)(2)(35)(46). Υπάρχουν 3 περιπτώσεις ανάλογα με το αν κοιτάω τον κατακόρυφο, τον οριζόντιο ή τον άξονα βάθους. Με κυκλική αναπαράσταση: $3x_1^2x_2^2$.
- Να κάνω περιστροφές 90^o και -90^o γύρω από τον άξονα που ενώνει μέσα απέναντι όψεων: (1)(2)(3456). Υπάρχουν 3 περιπτώσεις ανάλογα με το αν κοιτάω τον κατακόρυφο, τον οριζόντιο ή τον άξονα βάθους. Συνολικά 6. Με κυκλική αναπαράσταση: $6x_1^2x_4^1$.

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις όψεις ε κύβου με 3 χρώματα;

- Να κάνω περιστροφές 180^o γύρω από άξονες, που ενώνουν μέσα απέναντι ακμών. (15)(23)(46). Υπάρχουν 6 περιπτώσεις. Με κυκλική αναπαράσταση: $6x_2^3$.
- Να κάνω περιστροφές 120^o και -120^o γύρω από άξονες, που ενώνουν απέναντι κορυφές. (154)(236). Υπάρχουν 8 περιπτώσεις. Με κυκλική αναπαράσταση: $8x_3^2$.

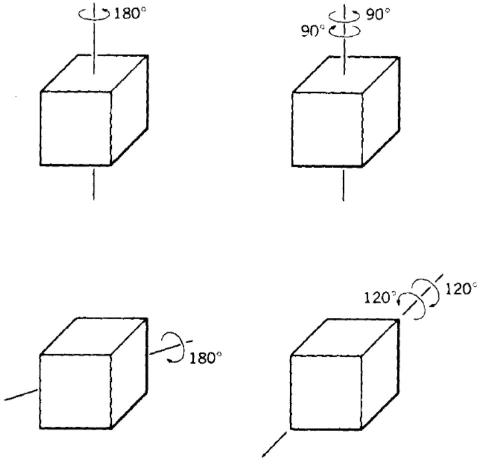

180°
90°
90°
180°
120°
120°

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις όψεις ενός κύβου με 3 χρώματα;

- Άρα, συνολικά $|G| = 24$ και
$$P_G = \frac{x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4^1 + 6x_2^3 + 8x_3^2}{24}$$
- Έχουμε 3 χρώματα: $c_1 + c_2 + c_3$, οπότε:
$$P_G = \frac{1}{24}[(c_1+c_2+c_3)^6+3(c_1+c_2+c_3)^2(c_1^2+c_2^2+c_3^2)^2+6(c_1+c_2+c_3)^2(c_1^4+c_2^4+c_3^4)^1+6(c_1^2+c_2^2+c_3^2)^3+8(c_1^3+c_2^3+c_3^3)^2]$$
- Θέτοντας $w(c_1) = w(c_2) = w(c_3) = 1$ έχουμε:
$$P_G = \frac{3^6 + 3 \cdot 3^2 3^2 + 6 \cdot 3^2 3 + 6 \cdot 3^3 + 8 \cdot 3^2}{24} = \frac{729 + 243 + 162 + 162 + 72}{24} = \frac{1368}{24} = 57$$

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις κορυφές ενός κύβου με 2 χρώματα;

- Έστω G το σύνολο μεταθέσεων, που αντιστοιχούν σε όλες τις περιστροφές του κύβου. Υπάρχουν 24 μεταθέσεις στο G, που ομαδοποιούνται στισπαρακάτω 5 κατηγορίες:
  1. Ταυτοτική μετάθεση. Κυκλική αναπαράσταση: x_1^8.
  2. 3 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180^o γύρω από άξονες, που συνδέουν τα μέσα απέναντι όψεων. Κυκλική αναπαράσταση: $3x_2^4$.
  3. 6 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 90^o γύρω από άξονες, που συνδέουν τα μέσα απέναντι όψεων. Κυκλική αναπαράσταση: $6x_4^2$.
  4. 6 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180^o γύρω από άξονες, που συνδέουν τα μέσα απέναντι ακμών. Κυκλική αναπαράσταση: $6x_2^4$.
  5. 8 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 120^o γύρω από άξονες, που συνδέουν απέναντι κορυφές. Κυκλική αναπαράσταση: $8x_1^2x_3^2$.

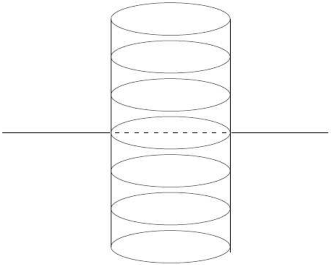

180°
90°
90°
180°
120°
120°

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις κορυφές ενός κύβου με 2 χρώματα;

- Επομένως, ο δείκτης κύκλων του συνόλου μεταθέσεων G είναι: $P_G = \frac{1}{24}(x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2x_3^2)$
- Αφού έχουμε δύο χρώματα, ο κατάλογος προτύπων είναι: $P_G = \frac{1}{24}((x+y)^8 + 9(x^2+y^2)^4 + 6(x^4+y^4)^2 + 8(x+y)^2(x^3+y^3)^2)$
- Θέτοντας $w(x) = w(y) = 1$ στην παραπάνω σχέση, το πλήθος των προτύπων είναι 23, που δίνει και το πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών των 8 κορυφών του κύβου με 2 χρώματα.

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω έναν κύλινδρο που έχει χωριστεί σε 6 τμήματα (οριζόντια) με 1 ή περισσότερα χρώματα;

- Έστω G το σύνολο μεταθέσεων, που αντιστοιχούν σε όλες τις συμμετρίες του κυλίνδρου. Υπάρχουν 2 μεταθέσεις στο G:
  1. Ταυτοτική μετάθεση. Κυκλική αναπαράσταση: x_1^6
  2. Περιστροφή 180^o γύρω από τον οριζόντιο άξονα, που χωρίζει το τρίτο από το τέταρτο μέρος. Κυκλική αναπαράσταση: x_2^3

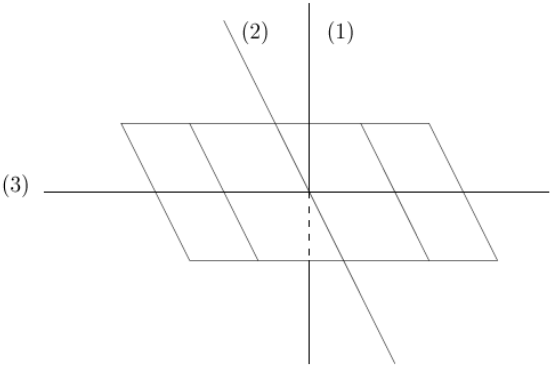


Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω έναν κύλινδρο που έχει χωριστεί σε 6 τμήματα (οριζόντια) με 1 ή περισσότερα χρώματα;

- Επομένως, ο δείκτης κύκλων του συνόλου μεταθέσεων G είναι: $P_G = \frac{1}{2}(x_1^6 + x_2^3)$
- Αφού έχουμε n χρώματα, ο κατάλογος προτύπων είναι: $P_G = \frac{1}{2}((x_1 + \dots + x_n)^6 + (x_1^2 + \dots + x_n^2)^3)$
- Θέτοντας $w(x_1) = \dots = w(x_n) = 1$ στην παραπάνω παράσταση, το πλήθος των προτύπων, δηλ. το πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών, είναι $\frac{1}{2}(n^6 + n^3) = \frac{n^3(n^3+1)}{2}$.

Έχουμε σκακιέρες διαστάσεων 2×4 που έχουν άσπρ και κόκκινα τετράγωνα. Πόσες διαφορετικές από αυτές υπάρχουν με 3 κόκκινα και 5 άσπρα τετράγωνα;

- Έστω G το σύνολο μεταθέσεων, που αντιστοιχούν σε όλες τις περιστροφές της σκακιέρας. Υπάρχουν 4 μεταθέσεις στο G, που ομαδοποιούνται στις παρακάτω 4 κατηγορίες:
  1. Ταυτοτική μετάθεση. Κυκλική αναπαράσταση: x_1^8.
  2. Η μετάθεση, που αντιστοιχεί σε περιστροφή 180^o της σκακιέρας γύρω από άξονα, που είναι κάθετος στη σκακιέρα και διέρχεται από το κέντρο της. Κυκλική αναπαράσταση: x_2^4.
  3. Η μετάθεση, που αντιστοιχεί σε περιστροφή 180^o γύρω από τον οριζόντιο άξονα, που κόβει τις δύο γραμμές της σκακιέρας. Κυκλική αναπαράσταση: x_2^4.
  4. Η μετάθεση, που αντιστοιχεί σε περιστροφή 180^o γύρω από τον κάθετο άξονα, που κόβει στη μέση τις 4 στήλες της σκακιέρας. Κυκλική αναπαράσταση: x_2^4.


(2)
(1)
(3)

Έχουμε σκακιέρες διαστάσεων 2×4 που έχουν άσπρα και κόκκινα τετράγωνα. Πόσες διαφορετικές από αυτές υπάρχουν με 3 κόκκινα και 5 άσπρα τετράγωνα;

- Επομένως, ο δείκτης κύκλων του συνόλου μεταθέσεων G είναι: $P_G = \frac{1}{4}(x_1^8 + 3x_2^4)$.
- Αφού έχουμε δύο χρώματα, ο κατάλογος προτύπων είναι: $P_G = \frac{1}{4}((x+y)^8 + 3(x^2+y^2)^4) =$ $\frac{1}{4}[\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} x^k y^{8-k} + 3\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} x^{2k} y^{8-2k}]$
- Αναζητούμε το συντελεστή του όρου x^3y^5 στην παραπάνω παράσταση. Κάνοντας πράξεις, αυτός προκύπτει ότι είναι: $\frac{1}{4}[\binom{8}{3} + 3 \cdot 0] = 14$.

Γενικευμένη μορφή θεωρήματος Pólya

- Δεδομένα: σύνολα D, R, συναρτήσεις $f : D \to R$, σύνολο μεταθέσεων G για τα στοιχεία του D, σύνολο μεταθέσεων H για τα στοιχεία του R, βάρη στοιχείων του R.
- Ζητούμενο: το συνολικό βάρος των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων f.
- Διατύπωση: Ο κατάλογος των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού D και σύνολο τιμών R είναι $\frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{\pi\in G;\tau\in H}\psi[(\pi,\tau)']$, όπου $\psi[(\pi,\tau)']$ είναι το πλήθος των συναρτήσεων για τις οποίες ισχύει $\tau f(d) = f[\pi(d)]$ για κάθε στοιχείο $d \in D$.
- Εφαρμογή: Το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας συναρτήσεων από το D στο R είναι η τιμή της έκφρασης $P_G((\frac{\partial}{\partial z_1})^{b_1}, (\frac{\partial}{\partial z_2})^{b_2}, (\frac{\partial}{\partial z_3})^{b_3}, \ldots) \times P_H[e^{c_1(z_1+z_2+z_3+\ldots)}, e^{2c_2(z_2+z_4+z_6+\ldots)}, e^{3c_3(z_3+z_6+z_9+\ldots)}, \ldots]$ για $z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = 0$, με b_i κύκλους μεγέθους i στο G και c_i κύκλους μεγέθους i στο H.

Έχουμε μία σκακιέρα διαστάσεων 2×2 και 2 διαθέσιμα χρώματα x, y. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί σχηματισμοί χρωματικών αντιθέσεων;

- Έστω $D = \{a, b, c, d\}$ τα 4 κουτάκια της σκακιέρας και $R = \{x, y\}$ τα 2 διαθέσιμα χρώματα.
- Έστω $G = \{\begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ bcda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ cdab \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ dabc \end{pmatrix}\}$ το σύνολο μεταθέσεων, που αντιστοιχεί σε περιστροφές της σκακιέρας και $H = \{\begin{pmatrix} xy \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ yx \end{pmatrix}\}$ στο σύνολο μεταθέσεων, που αντιστοιχεί σε εναλλαγές των χρωμάτων x, y.
- Το σύνολο G περιέχει 1 μετάθεση με 4 κύκλους μεγέθους 1 (z_1^4), 2 μεταθέσεις με 1 κύκλο μεγέθους 4 ($2z_4^1$), και 1 μετάθεση με 2 κύκλοι μεγέθους 2 (z_2^2).
- Το σύνολο H περιέχει 1 μετάθεση με 2 κύκλους μεγέθους 1 (z_1^2), 1 μετάθεση με 1 κύκλο μεγέθους 2 (z_2^1).

Έχουμε μία σκακιέρα διαστάσεων 2×2 και 2 διαθέσιμα χρώματα x, y. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί σχηματισμοί χρωματικών αντιθέσεων;

G: $z_1^4 + 2z_4^1 + z_2^2$
H: $z_1^2 + z_2^1$

- Εφαρμόζοντας τη γενικευμένη μορφή του θεωρήματος Pólya έχουμε ότι οι ζητούμενοι σχηματισμοί είναι:
$\frac{1}{4}\frac{1}{2}((\frac{\partial}{\partial z_1})^4 + (\frac{\partial}{\partial z_2})^2 + 2(\frac{\partial}{\partial z_4})^1) \times [e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)} + e^{2\cdot 1(z_2+z_4)}]|_{z_1=z_2=z_3=z_4=0} =$
$\frac{1}{8}(\frac{\partial^4}{\partial z_1^4}e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}e^{2(z_2+z_4)} + 2 \cdot \frac{\partial}{\partial z_4}e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)} + 2 \cdot \frac{\partial}{\partial z_4}e^{2(z_2+z_4)}) =$
$\frac{1}{8}(2^4 + 2^2 + 2^2 + 2 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^1) = 4$

Με πόσους τρόπους μπορώ να μοιράσω 5 βιβλία, 2 α· τα οποία είναι ίδια, σε 4 παιδιά, μεταξύ των οποίων υπάρχει ένα ζευγάρι διδύμων;

- $D = \{a, b, c, d, e\}$: σύνολο των 5 βιβλίων, όπου τα a, b είναι ίδια.
  - Το σύνολο G των μεταθέσεων στο σύνολο D έχει 2 μεταθέσεις: $\{\begin{pmatrix} abcde \\ abcde \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcde \\ bacde \end{pmatrix}\}$
  - Στο σύνολο G υπάρχει 1 μετάθεση με 5 κύκλους μεγέθους 1 ο καθένας (z_1^5) και 1 μετάθεση με 1 κύκλο μεγέθους 2 και 3 κύκλους μεγέθους 1 ο καθένας ($z_2^1 z_1^3$)
- $R = \{u, v, x, y\}$: σύνολο των 4 παιδιών, όπου τα u, v είναι τα δίδυμα.
  - Το σύνολο H των μεταθέσεων στο σύνολο R έχει 2 μεταθέσεις: $\{\begin{pmatrix} uvxy \\ uvxy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} uvxy \\ vuxy \end{pmatrix}\}$
  - Στο σύνολο H υπάρχει 1 μετάθεση με 4 κύκλους μεγέθους 1 ο καθένας (z_1^4) και 1 μετάθεση με 1 κύκλο μεγέθους 2 και 2 κύκλους μεγέθους 1 ο καθένας ($z_2^1 z_1^2$)

Με πόσους τρόπους μπορώ να μοιράσω 5 βιβλία, 2 α· τα οποία είναι ίδια, σε 4 παιδιά, μεταξύ των οποίων υπάρχει ένα ζευγάρι διδύμων;

G: $z_1^5 + z_2^1 z_1^3$
H: $z_1^4 + z_2^1 z_1^2$

- Εφαρμόζοντας τη γενικευμένη μορφή του θεωρήματος Pólya έχουμε ότι οι ζητούμενοι σχηματισμοί είναι:
$\frac{1}{2}\frac{1}{2}((\frac{\partial}{\partial z_1})^5 + (\frac{\partial}{\partial z_1})^3 \frac{\partial}{\partial z_2}) \times [e^{4(z_1+z_2)} + e^{2(z_1+z_2)} e^{2z_2}]|_{z_1=z_2=0} =$
$\frac{1}{4}(\frac{\partial^5}{\partial z_1^5} + \frac{\partial^3}{\partial z_1^3}\frac{\partial}{\partial z_2}) \times [e^{4(z_1+z_2)} + e^{2(z_1+z_2)} e^{2z_2}]|_{z_1=z_2=0} =$
$\frac{1}{4}(\frac{\partial^5}{\partial z_1^5} e^{4(z_1+z_2)} + \frac{\partial^5}{\partial z_1^5} e^{2(z_1+z_2)} e^{2z_2} + \frac{\partial^3}{\partial z_1^3}\frac{\partial}{\partial z_2} e^{4(z_1+z_2)} +$
$\frac{\partial^3}{\partial z_1^3}\frac{\partial}{\partial z_2} e^{2(z_1+z_2)} e^{2z_2}) = \frac{1}{4}(4^5 + 2^4 + 4^3 \cdot 4^1 + 2^3 2^1 2^1) =$
$\frac{1}{4}(4^5 + 2^4 + 4^3 \cdot 4 + 2^3 \cdot 4) = 336$

Με πόσους τρόπους μπορώ να μοιράσω 3 ίδια αντικείμενα σε 2 διαφορετικά κουτιά;

- $D = \{a, b, c\}$: σύνολο των 3 αντικειμένων, όπου όλα είναι ίδια.
  - Το σύνολο G των μεταθέσεων στο σύνολο D έχει 4 μεταθέσεις: $\{\begin{pmatrix} abc \\ abc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ bca \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ cab \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ bac \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ cba \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ acb \end{pmatrix}\}$
  - Στο σύνολο G υπάρχει 1 μετάθεση με 3 κύκλους μεγέθους 1 ο καθένας (z_1^3), 2 μεταθέσεις με 1 κύκλο μεγέθους 3 ($2z_3^1$) και 3 μεταθέσεις με 1 κύκλο μεγέθους 2 και 1 κύκλο μεγέθους 1 ($3z_2^1 z_1^1$)
- $R = \{x, y\}$: σύνολο των 2 κουτιών.
  - Το σύνολο H των μεταθέσεων στο σύνολο R έχει 2 μεταθέσεις: $\{\begin{pmatrix} xy \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ yx \end{pmatrix}\}$
  - Στο σύνολο H υπάρχει 1 μετάθεση με 2 κύκλους μεγέθους 1 ο καθένας (z_1^2) και 1 μετάθεση με 1 κύκλο μεγέθους 2 (z_2^1)

Με πόσους τρόπους μπορώ να μοιράσω 3 ίδια αντικείμενα σε 2 διαφορετικά κουτιά;

G: $z_1^3 + 2z_3^1 + 3z_2^1 z_1^1$
H: $z_1^2 + z_2^1$

- Εφαρμόζοντας τη γενικευμένη μορφή του θεωρήματος Pólya έχουμε ότι οι ζητούμενοι σχηματισμοί είναι:
$\frac{1}{6}\frac{1}{2}((\frac{\partial}{\partial z_1})^3 + 2\frac{\partial}{\partial z_3} + 3\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}) \times [e^{2(z_1+z_2+z_3)} + e^{2z_2}]|_{z_1=z_2=0} =$
$\frac{1}{12}(\frac{\partial^3}{\partial z_1^3} + 2\frac{\partial}{\partial z_3} + 3\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}) \times [e^{2(z_1+z_2+z_3)} + e^{2z_2}]|_{z_1=z_2=0} =$
$\frac{1}{12}(\frac{\partial^3}{\partial z_1^3})e^{2(z_1+z_2+z_3)} + \frac{\partial^3}{\partial z_1^3}e^{2z_2} + 2\frac{\partial}{\partial z_3}e^{2(z_1+z_2+z_3)} + 2\frac{\partial}{\partial z_3}e^{2z_2} +$
$3\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}e^{2(z_1+z_2+z_3)} + 3\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}e^{2z_2} =$
$\frac{1}{12}(2^3+0+2\cdot 2^1+0+3\cdot 2^1\cdot 2^1+0) = \frac{1}{12}(2^3+2\cdot 2+3\cdot 2\cdot 2) = 2$