Διακριτά Μαθηματικά

Φροντιστήριο

Θεωρία μέτρησης Pólya I

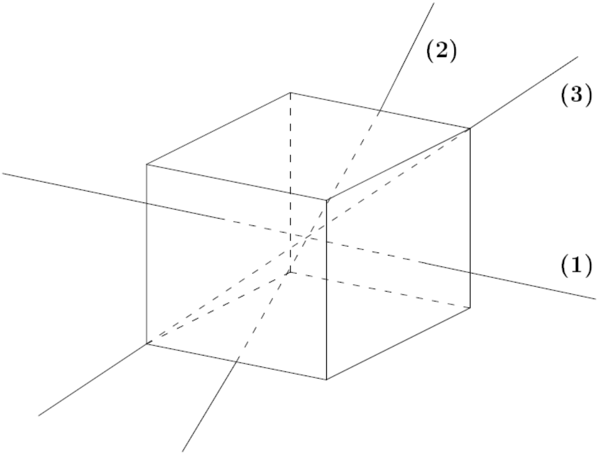
Οι έξι όψεις ενός κύβου θα χρωματιστούν με 6 διαφορετικά χρώματα, κάθε όψη με ένα διαφορετικό χρώμα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Οι έξι όψεις ενός κύβου θα χρωματιστούν με 6 διαφορετικά χρώματα, κάθε όψη με ένα διαφορετικό χρώμα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

- Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με x, όπου x είναι ο αριθμός των κλάσεων ισοδυναμίας, στις οποίες διαιρείται το σύνολο των δυνατών χρωματισμών, από τη σχέση ισοδυναμίας την επαγομένη από την ομάδα μεταθέσεων G του κύβου. Από το Θεώρημα του Burnside είναι:

$$x = \frac{1}{|G|} \sum_{p \in G} y(p)$$

Οι έξι όψεις ενός κύβου θα χρωματιστούν με 6 διαφορετικά χρώματα, κάθε όψη με ένα διαφορετικό χρώμα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;



Οι έξι όψεις ενός κύβου θα χρωματιστούν με 6 διαφορετικά χρώματα, κάθε όψη με ένα διαφορετικό χρώμα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Τα είδη των μεταθέσεων είναι τα παρακάτω:

- η ταυτοτική με $y(p) = 6!$
- τρεις μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180^o γύρω από άξονες, που συνδέουν κέντρα απέναντι όψεων,με $y(p) = 0$.
- έξι μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 90^o γύρω από άξονες, που συνδέουν τα κέντρα απέναντι όψεων, με $y(p) = 0$.
- έξι μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180^o γύρω από άξονες, που συνδέουν τα μέσα απέναντι ακμών, με $y(p) = 0$, και τέλος,
- οκτώ μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 120^o γύρω από άξονες, που συνδέουν απέναντι κορυφές, με $y(p) = 0$.

Οι έξι όψεις ενός κύβου θα χρωματιστούν με 6 διαφορετικά χρώματα, κάθε όψη με ένα διαφορετικό χρώμα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Άρα,

$$x = \frac{1}{|G|}\sum_{p\in G} y(p) = \frac{1}{24}6! = \frac{6!}{4!} = 30$$

Πόσα διαφορετικά βραχιολάκια, που να έχουν 5 χάν μπλε, κίτρινες και άσπρες, μπορούμε να φτιάξουμε, όταν οι χάντρες μπορούν να περιστρέφονται;

Πόσα διαφορετικά βραχιολάκια, που να έχουν 5 χάντ μπλε, κίτρινες και άσπρες, μπορούμε να φτιάξουμε, όταν οι χάντρες μπορούν να περιστρέφονται;

Με Burnside:

- Έστω S το σύνολο, που αποτελείται από τα $3^5 = 243$ διαφορετικά κολιέ, όταν δεν λαμβάνονται υπόψιν οι ισοδυναμίες λόγω περιστροφών. Έστω, επίσης, $G = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ η ομάδα μεταθέσεων, όπου p_1 είναι η ταυτοτική μετάθεση, p_2 η μετάθεση, που απεικονίζει ένα κολιέ σ′ ένα άλλο, που είναι ίδιο με το προηγούμενο περιστραμμένο κατά μία χάντρα δεξιόστροφα, και p_3, p_4, p_5 οι μεταθέσεις, που απεικονίζουν ένα κολιέ σ′ ένα όμοιο μ′ αυτό, αλλά περιστραμμένο δεξιόστροφα κατά δύο, τρεις και τέσσερις χάντρες αντίστοιχα.

Πόσα διαφορετικά βραχιολάκια που να έχουν 5 χάντ μπλε, κίτρινες και άσπρες, μπορούμε να φτιάξουμε όταν οι χάντρες μπορούν να περιστρέφονται;

Ο αριθμός των στοιχείων του S, που παραμένουν αμετάβλητα,

- από την p_1 είναι 243
- από την p_2 είναι 3, διότι η περιστροφή του κολιέ κατά μία θέση θα δώσει το ίδιο κολιέ μόνο όταν και οι πέντε χάντρες έχουν το ίδιο χρώμα.
- από τις p_3, p_4, p_5 είναι ομοίως 3.

Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα του Burnside θα έχουμε για το ζητούμενο αριθμό των διαφορετικών κολιέ,

$$\frac{1}{5}(243 + 3 + 3 + 3 + 3) = 51$$

Πόσα διαφορετικά βραχιολάκια που να έχουν 5 χάντρες μπλε, κίτρινες και άσπρες, μπορούμε να φτιάξουμε όταν οι χάντρες μπορούν να περιστρέφονται;

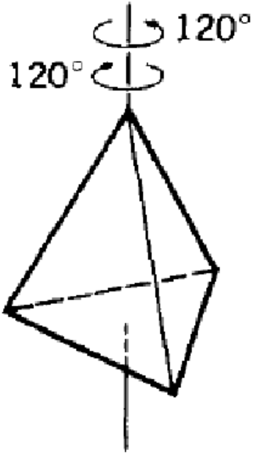
Με Polya:

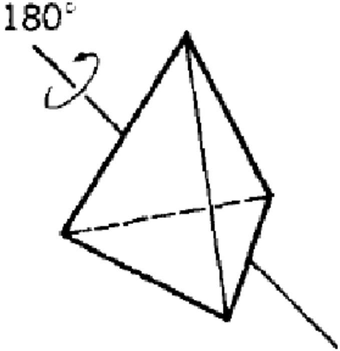
- Αφού έχουμε τρία χρώματα b, y, w, ο κατάλογος προτύπων είναι: $P_G = \frac{1}{5}((b+y+w)^5 + 4(b^5+y^5+w^5))$.

- Θέτοντας $w(b) = w(y) = w(w) = 1$ στην παραπάνω σχέση το πλήθος προτύπων είναι 51, άρα 51 διαφορετικά βραχιολάκια.

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις κορυφές μιας πυραμίδας με 4 χρώματα;

- Έστω G το σύνολο μεταθέσεων που αντιστοιχούν σε όλες τις περιστροφές της πυραμίδας. Υπάρχουν 12 μεταθέσεις στο G που ομαδοποιούνται στις παρακάτω 3 κατηγορίες:
  1. Ταυτοτική μετάθεση. Κυκλική αναπαράσταση: x_1^4.
  2. 8 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 120^o γύρω από άξονες, που συνδέουν μία κορυφή με το κέντρο της απέναντι όψης. Κυκλική αναπαράσταση: $8x_1x_3$.
  3. 3 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180^o γύρω από άξονες, που συνδέουν τα μέσα απέναντι ακμών. Κυκλική αναπαράσταση: $3x_2^2$.


120°
120°


180°

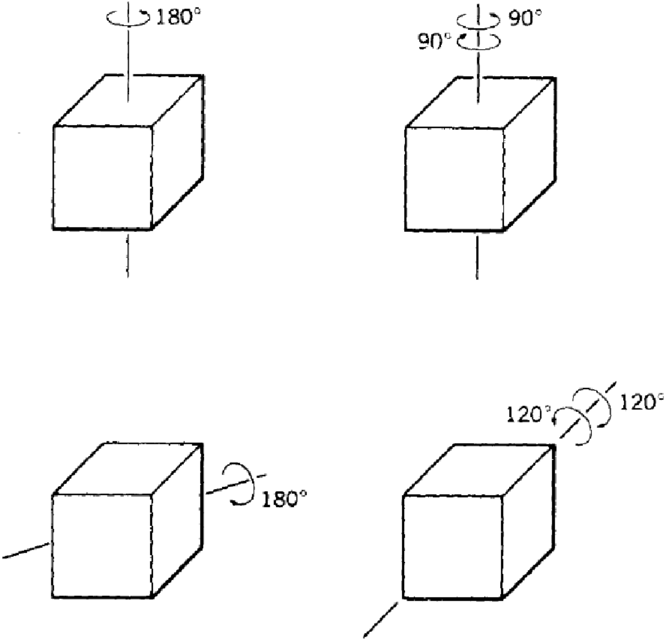
Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις κορυφές μιας πυραμίδας με 4 χρώματα;

- Επομένως, ο δείκτης κύκλων του συνόλου μεταθέσεων G είναι: $P_G = \frac{1}{12}(x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2)$.
- Αφού, έχουμε τέσσερα χρώματα, ο κατάλογος προτύπων είναι: $P_G = \frac{1}{12}((a+b+c+d)^4 + 8(a+b+c+d)(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2)$.
- Θέτοντας $w(a) = w(b) = w(c) = w(d) = 1$ στην παραπάνω σχέση, το πλήθος των προτύπων είναι 36, που δίνει και το πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών.

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις όψεις ε… κύβου με 6 χρώματα;

Οι μεταθέσεις είναι:

1. η ταυτοτική
2. τρεις μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180^o γύρω από άξονες, που συνδέουν κέντρα απέναντι όψεων.
3. έξι μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 90^o γύρω από άξονες, που συνδέουν τα κέντρα απέναντι όψεων.
4. έξι μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180^o γύρω από άξονες, που συνδέουν τα μέσα απέναντι ακμών και τέλος,
5. οκτώ μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 120^o γύρω από άξονες, που συνδέουν απέναντι κορυφές.


180°
90°
90°
180°
120°
120°

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις όψεις εν κύβου με 6 χρώματα;

- Άρα, είναι: $|G| = 24$ και
$$P_G = \frac{x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4^1 + 6x_2^3 + 8x_3^2}{24}$$
- Έχουμε 6 χρώματα: $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6$, οπότε: $P_G = \frac{1}{24}[(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6)^6 + 3(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6)^2 (c_1^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2+c_5^2+c_6^2)^2 + 6(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6)^2(c_1^4+c_2^4+c_3^4+c_4^4+c_5^4+c_6^4)^1 + 6(c_1^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2+c_5^2+c_6^2)^3 + 8(c_1^3+c_2^3+c_3^3+c_4^3+c_5^3+c_6^3)^2]$
- Θέτοντας:
$w(c_1) = w(c_2) = w(c_3) = w(c_4) = w(c_5) = w(c_6) = 1$,
έχουμε: $P_G = \dfrac{6^6 + 3 \cdot 6^2 6^2 + 6 \cdot 6^2 6 + 6 \cdot 6^3 + 8 \cdot 6^2}{24} = 2226.$

Χρωματίζω τις όψεις ενός κύβου με 6 χρώματα. Ένα αυτά είναι το κόκκινο. Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις όψεις ενός κύβου ώστε ακριβώς 3 από τις όψεις να είναι κόκκινες;

Στο προηγούμενο ανάπτυγμα για το P_G, θεωρούμε το c_1 να αντιπροσωπεύει το κόκκινο χρώμα και αθροίζουμε τους όρους, που περιέχουν το c_1^3. Έχουμε:

$$\frac{1}{24}[\binom{6}{3}(c_2+c_3+c_4+c_5+c_6)^3c_1^3+3\cdot 4(c_2+c_3+c_4+c_5+c_6)(c_2^2+c_3^2+c_4^2+c_5^2+c_6^2)c_1^3+8\cdot 2(c_2^3+c_3^3+c_4^3+c_5^3+c_6^3)c_1^3]$$

Θέτουμε $c_1=c_2=c_3=c_4=c_5=c_6=1$, οπότε ο παραπάνω συντελεστής έχει την τιμή 120.