Διακριτά Μαθηματικά

Φροντιστήριο

Θεωρία μέτρησης Polya II

Ενας κύλινδρος, που έχει διαιρεθεί σε 6 τμήματα θα χρωματιστεί με 1 ή περισσότερα από διαφορετικά χρώματα. Με πόσους τρόπους επιτυγχάνεται αυτό·

Ενας κύλινδρος, που έχει διαιρεθεί σε 6 τμήματα θα χρωματιστεί με 1 ή περισσότερα από διαφορετικά χρώματα. Με πόσους τρόπους επιτυγχάνεται αυτό·

Έστω Γ η ομάδα μεταθέσεων, που αντιστοιχεί σε όλες τις δυνατές συμμετρίες του κυλίνδρου. Έχουμε δύο μεταθέσεις στη Γ:

- την ταυτοτική, για την οποία η κυκλική αναπαράσταση είναι x_1^6.
- την περιστροφή γύρω από οριζόντιο άξονα, που χωρίζει το τρίτο από το τέταρτο μέρος, κατά 180^o, με αναπαράσταση x_2^3.

Ενας κύλινδρος, που έχει διαιρεθεί σε 6 τμήματα θα χρωματιστεί με 1 ή περισσότερα από διαφορετικά χρώματα. Με πόσους τρόπους επιτυγχάνεται αυτό·

Συνεπώς, ο δείκτης κύκλων P_G της Γ είναι,

$$P_G = \frac{1}{2}(x_1^6 + x_2^3)$$

και αν με $y_1, y_2, \ldots, y_n$ συμβολίσουμε τα διαφορετικά χρώματα, ο αριθμός εύρεσης των κλάσεων ισοδυναμίας γίνεται,

$$\frac{1}{2}[(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)^6 + (y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2)^3]$$

Έτσι, για $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1$ έχουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός τρόπων χρωματισμού είναι:

$$\frac{1}{2}(n^6 + n^3) = \frac{n^3(n^3 + 1)}{2}$$

.

Χρωματίζω τις όψεις ενός κύβου με 4 χρώματα, A, B, C, D. Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις όψεις ενός κύβου, ώστε 2 από αυτές να χρωματιστούν με το χρώμα A, 2 με το χρώμα B, 1 με το C και 1 με το χρώμα D;

- Έχουμε ήδη δει ότι για τον κύβο είναι: $|G| = 24$ και $P_G = \dfrac{x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4^1 + 6x_2^3 + 8x_3^2}{24}$
- Έχουμε 4 χρώματα: $c_1 + c_2 + c_3 + c_4$, οπότε: $P_G = \dfrac{1}{24}[(c_1 + c_2 + c_3 + c_4)^6 + 3(c_1 + c_2 + c_3 + c_4)^2$ $(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2)^2 + 6(c_1 + c_2 + c_3 + c_4)^2(c_1^4 + c_2^4 + c_3^4 + c_4^4)^1 +$ $6(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2)^3 + 8(c_1^3 + c_2^3 + c_3^3 + c_4^3)^2]$
- Θεωρούμε ότι $c_1 = A, c_2 = B, c_3 = C, c_4 = D$ και από το παραπάνω ανάπτυγμα αθροίζουμε τους συντελεστές του όρου $c_1^2c_2^2c_3c_4$.
- Το αποτέλεσμα είναι: $\dfrac{180 + 12}{24} = 8$.

Βρείτε τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να χρωματίσουμε 5 από τις 8 κορυφές ενός κύβου μαύρες και τις υπόλοιπες 3 άσπρες.

Βρείτε τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να χρωματίσουμε 5 από τις 8 κορυφές ενός κύβου μαύρες και τις υπόλοιπες 3 άσπρες.

Υπάρχουν 24 μεταθέσεις:

- η ταυτοτική με κυκλική αναπαράσταση x_1^8.
- 3 περιστοφές 180^o γύρω από άξονες, που ενώνουν τα μέσα απέναντι όψεων, με αναπαράσταση x_2^4.
- 6 περιστροφές 90^o γύρω από τους ίδιους άξονες, με αναπαραστάσεις x_4^2.
- 6 περιστροφές 180^o γύρω από άξονες, που συνδέουν τα μέσα απέναντι ακμών, με αναπαραστάσεις x_2^4 και τέλος,
- 8 περιστροφές 120^o γύρω από άξονες, που ενώνουν απέναντι κορυφές, με αναπαραστάσεις $x_1^2 x_3^2$.

Έτσι, ο δείκτης κύκλων P_G της Γ είναι:

$$P_G = \frac{1}{24}(x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2 x_3^2)$$

.

Βρείτε τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να χρωματίσουμε 5 από τις 8 κορυφές ενός κύβου μαύρες και τις υπόλοιπες 3 άσπρες

Ο αριθμός εύρεσης κλάσεων ισοδυναμίας για δύο χρώματα x, y είναι,

$$\frac{1}{24}[(x+y)^8 + 9(x^2+y^2)^4 + 6(x^4+y^4)^2 + 8(x+y)^2(x^3+y^3)^2] =$$

$$= \frac{1}{24}[\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} x^k y^{8-k} + 9\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} x^{2k} y^{8-2k} +$$

$$+6(x^8 + 2x^4y^4 + y^8) + 8(x^2 + 2xy + y^2)(x^6 + 2x^3y^3 + y^6)].$$

Έτσι, ο συντελεστής του x^5y^3 είναι:

$$\frac{1}{24}[\binom{8}{5} + 8 \cdot 2] = \frac{1}{24}(\frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} + 16) = 3.$$

Άρα, ο ζητούμενος αριθμός τρόπων είναι 3.

Τα τετράγωνα μιας 4×4 σκακιέρας θα χρωματιστού[ν] μαύρη και άσπρη μπογιά. Για να δημιουργήσουμε όλους τους μαυρόασπρους σχηματισμούς, πόσα διαφορετικά σχήματα πρέπει να κάνουμε;

Έστω $D = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{16}\}$ το σύνολο των 16 τετραγώνων της 4×4 σκακιέρας και $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$ η ομάδα μεταθέσεων επί του D με π_1 την ταυτοτική μετάθεση, με κυκλική αναπαράσταση x_1^{16}, π_2 τη μετάθεση, που αντιστοιχεί σε αριστερόστροφη περιστροφή της σκακιέρας κατά 90^o γύρω από άξονα, κάθετο στο κέντρο της, με κυκλική αναπαράσταση x_4^4, και π_3, π_4 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές κατά 180^o και 270^o, αντίστοιχα, γύρω από τον ίδιο άξονα, με κυκλικές αναπαραστάσεις x_2^8, x_4^4, αντίστοιχα.

Τότε, ο δείκτης κύκλων της G είναι,

$$P_G = \frac{1}{4}(x_1^{16} + x_2^8 + 2x_4^4)$$

Έστω $R = \{x, y\}$ το σύνολο των 2 χρωμάτων, μαύρο και άσπρο. Έστω επίσης $w(x) = x$ και $w(y) = y$. Τότε ο αριθμός εύρεσης σχηματισμών γίνεται:

$$\frac{1}{4}[(x+y)^{16} + (x^2+y^2)^8 + 2(x^4+y^4)^4]$$

Θέτοντας $x = y = 1$ παίρνουμε για το ζητούμενο αριθμό σχημάτων,

$$\frac{1}{4}(2^{16} + 2^8 + 2 \cdot 2^4) = 16456$$

.

Να λυθεί η παρακάτω σχέση αναδρομής με δύο τρόπο

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = n + 2, a_0 = 6, a_1 = 7$$

Να λυθεί η παρακάτω σχέση αναδρομής με δύο τρόπ

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = n + 2, a_0 = 6, a_1 = 7$$

1ος τρόπος:
Θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή της γραμμικής, που είναι η $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$ και παίρνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωσή της για να βρούμε την ομογενή λύση της γραμμικής:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \iff (x-2)^2 = 0 \iff x = 2, \ \textit{διπλή ρίζα}.$$

Άρα,

$$a_n^{(h)} = (An + B)2^n.$$

Να λυθεί η παρακάτω σχέση αναδρομής με δύο τρόπο

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = n + 2, a_0 = 6, a_1 = 7$$

Επιχειρούμε τώρα να βρούμε την ειδική λύση της γραμμικής. Δοκιμάζουμε την $a_n^{(p)} = Cn + D$ και έχουμε,

$$Cn + D - 4(Cn - C + D) + 4(Cn - 2C + D) = n + 2 \iff$$

$$Cn + D - 4C = n + 2 \iff (C = 1, D = 6)$$

Άρα $a_n^{(p)} = n + 6$. Επομένως, η δοθείσα γραμμική έχει γενική λύση,

$$a_n = (An+B)2^n+n+6 \overset{n=0,n=1}{\overbrace{\Longrightarrow}} \left\{ \begin{array}{l} B + 6 = 6 \\ 2A + 2B + 7 = 7 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = 0 \\ A = 0 \end{array} \right\}.$$

Άρα η γενική λύση της δοθείσης γραμμικής είναι η:

$$a_n = n + 6, \ \forall n \in N$$

Να λυθεί η παρακάτω σχέση αναδρομής με δύο τρόπο

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = n + 2, a_0 = 6, a_1 = 7$$

Άρα η γενική λύση της δοθείσης γραμμικής είναι η,

$$a_n = n + 6, \ \forall n \in N$$

.

Να λυθεί η παρακάτω σχέση αναδρομής με δύο τρόπο

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = n + 2,\ a_0 = 6,\ a_1 = 7$$

2ος τρόπος:

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = n + 2 \Longleftrightarrow$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k - 4x \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} x^{k-1} + 4x^2 \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} (k+2) x^k \Longleftrightarrow$$

$$A(x) - a_0 - a_1 x - 4x[A(x) - a_0] + 4x^2 A(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2} - (2+3x) \Longleftrightarrow$$

$$(4x^2 - 4x + 1)A(x) - 6 - 7x + 24x = \frac{2-x}{(1-x)^2} - (2+3x) \Longleftrightarrow$$

.

Να λυθεί η παρακάτω σχέση αναδρομής με δύο τρόπο

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = n + 2, a_0 = 6, a_1 = 7$$

$$A(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2(2x-1)^2} + \frac{4-20x}{(2x-1)^2} = \frac{-5x+6}{(1-x)^2} \Longrightarrow$$

$$A(x) = \frac{5}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} = 5\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}(-1)^k x^k + \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}(-1)^k x^k$$

Άρα,

$$a_n = 5\binom{-1}{n}(-1)^n + \binom{-2}{n}(-1)^n = 5 + n + 1 = n + 6,\ \forall n \in N.$$

Να λυθεί η παρακάτω σχέση αναδρομής

$$T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + n^3, T(1) = 1$$

Να λυθεί η παρακάτω σχέση αναδρομής

$$T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + n^3, T(1) = 1$$

$$T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + n^3 = 8[8T(\frac{n}{2^2}) + (\frac{n}{2})^3] + n^3 =$$

$$= 8^2T(\frac{n}{2^2}) + 8(\frac{n}{2})^3 + n^3 = 8^2[8T(\frac{n}{2^3}) + (\frac{n}{2^2})^3] + 8(\frac{n}{2})^3 + n^3 =$$

$$= 8^3T(\frac{n}{2^3}) + 8^2(\frac{n}{2^2})^3 + 8(\frac{n}{2})^3 + n^3 = \ldots =$$

$$= 8^iT(\frac{n}{2^i}) + \sum_{k=0}^{i-1} 8^k(\frac{n}{2^k})^3$$

Να λυθεί η παρακάτω σχέση αναδρομής

$$T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + n^3, T(1) = 1$$

Έτσι, αν θεωρήσουμε $n = 2^i$, έχουμε,

$$T(n) = (2^3)^i T(\frac{n}{2^i}) + \sum_{k=0}^{i-1} (2^3)^k (\frac{n}{2^k})^3 \Longrightarrow$$

$$n^3 + \sum_{k=0}^{i-1} n^3 = T(n) \Longrightarrow T(n) = n^3 + n^3 \log n$$

Άρα, $T(n) = O(n^3 \log n)$.