Διακριτά Μαθηματικά

Φροντιστήριο Επανάληψης

Θέμα φεβρουαρίου 2017:Πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι να περάσουν k (διαφορετικά) αυτοκίνητα από n διαφορετικούς υπαλλήλους διοδίων, όταν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία κάθε υπάλληλος εξυπηρετεί τα αυτοκίνητα;

- Το πρώτο αυτοκίνητο έχει n επιλογές όσοι και οι υπάλληλοι.
- Το δεύτερο αυτοκίνητο έχει $n+1$ επιλογές: αν πάει στον υπάλληλο, που πήγε και το πρώτο αυτοκίνητο να πάει πρίν ή μετά από αυτό.
- Το τρίτο αυτοκίνητο έχει $n+2$ επιλογές: αν πάει στον υπάλληλο, που πήγε και το πρώτο αυτοκίνητο να πάει πρίν ή μετά από αυτό, αν πάει στον υπάλληλο, που πήγε και το δεύτερο αυτοκίνητο να πάει πρίν ή μετά από αυτό.

- Το k αυτοκίνητο έχει $n+k-1$ επιλογές: όμοια, όπως προηγουμένως.

Άρα συνολικά (από κανόνα γινομένου) υπάρχουν:
$n(n+1)...(n+k-1) = \dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$ διαφορετικοί τρόποι.

Θέμα Ιουνίου 2017:΄Εχω n θέσεις στη σειρά και θέλω να τοποθετήσω k φοιτητές για να γράψουν εξετάσεις, ώστε μεταξύ κάθε δύο φοιτητών να υπάρχει μία κενή θέση $(n \geq 2k - 1)$. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να το κάνω;

- Βγάζω φοιτητές και θρανία από την αίθουσα.

  Δίνω ένα θρανίο σε κάθε φοιτητή (1 τρόπος υπάρχει, αφού τα θρανία είναι ίδια, δεσμεύω k).

  Διατάσσω τους φοιτητές με τα θρανία τους: υπάρχουν $k!$ διαφορετικοί τρόποι, αφού οι φοιτητές είναι διαφορετικοί.

Τοποθετώ ένα άδειο θρανίο ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι φοιτητών (1 τρόπος, αφού τα θρανία είναι ίδια, δεσμεύω $k-1$ θρανία).

Μοιράζω τα $n-2k+1$ ίδια θρανία, που περίσσεψαν σε $k+1$ διαφορετικές υποδοχές. Αυτό γίνεται με:
$$\binom{k+1+n-2k+1-1}{n-2k+1} = \binom{n-k+1}{n-2k+1}$$

Άρα, συνολικά υπάρχουν $k! \cdot \binom{n-k+1}{n-2k+1}$ διαφορετικοί τρόποι.

Θέμα Σεπτεμβρίου 2017:Να βρείτε τον αριθμό των λέξεων μήκους n, που σχηματίζονται από το αλφάβητο $\{ 0, 1 \}$, οι οποίες έχουν ΑΚΡΙΒΩΣ m τμήματα της μορφής 01.

- Υπάρχουν $(n-1)$ θέσεις μεταξύ των ψηφίων σε μία τέτοια λέξη. Καλούμε θέση - διακόπτη μία θέση στην οποία τα ψηφία αλλάζουν είτε από 0 σε 1 ή από 1 σε 0.

Για μία λέξη της επιθυμητής μορφής υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

1. Η λέξη να αρχίζει και να τελειώνει με 1.
   Σε αυτήν τη λέξη πρέπει να υπάρχουν $2m$ θέσεις - διακόπτες (με κάθε δεύτερη θέση - διακόπτη να δίνει ένα 01) και επομένως, υπάρχουν $\binom{n-1}{2m}$ τέτοιες λέξεις.
2. Η λέξη να αρχίζει από 1 και να τελειώνει σε 0.
   Θα υπάρχουν $2m+1$ θέσεις - διακόπτες και επομένως, $\binom{n-1}{2m+1}$ τέτοιες λέξεις.
3. Η λέξη να αρχίζει από 0 και να τελειώνει σε 1.
   Θα υπάρχουν $2m-1$ θέσεις - διακόπτες και επομένως, $\binom{n-1}{2m-1}$ τέτοιες λέξεις.
4. Η λέξη να αρχίζει από 0 και να τελειώνει σε 0.
   Θα υπάρχουν $2m$ θέσεις - διακόπτες και επομένως, $\binom{n-1}{2m}$ τέτοιες λέξεις.

Άρα, έχουμε
$\binom{n-1}{2m} + \binom{n-1}{2m+1} + \binom{n-1}{2m-1} + \binom{n-1}{2m} = \binom{n}{2m+1} + \binom{n}{2m} = \binom{n+1}{2m+1}$
τέτοιες λέξεις.

Θέμα Φεβρουαρίου 2017:Χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις, υπολογίστε με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν τα 52 (διακεκριμένα) χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 (διακεκριμένους) παίκτες, όταν κάθε παίκτης πρέπει να πάρει τουλάχιστον ένα χαρτί.

Τα χαρτιά είναι διαφορετικά, οπότε μας ενδιαφέρει η σειρά (όχι με την έννοια ότι μας ενδιαφέρει η σειρά, που μοιράζονται τα χαρτιά, αλλά με την έννοια ότι μας επιβάλλουν μία διάταξη στους παίκτες). Άρα, πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι εκθετικές γεννήτριες συναρτησεις μιας και οι παίκτες και τα χαρτιά θεωρούνται διακεκριμένες οντότητες.

- Η ΓΣ για κάθε παίκτη είναι: $\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots = e^x - 1$ (κάθε παράγοντας στο γινόμενο εκφράζει τη δυνατότητα μοιράσματος ενός, δύο, τριών ή περισσοτερων χαρτιών σε κάθε ένα από τους τέσσερεις παίκτες).
  Σημείωση: Επειδή, τα χαρτιά είναι 52 και επειδή κάθε παίκτης πρέπει να πάρει τουλάχιστον 1 χαρτί και κανένας παίκτης δεν μπορεί να πάρει περισσότερα από 49 χαρτιά, θα έπρεπε να σταματήσουμε το άθροισμα $\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$ στον όρο $\frac{x^{49}}{49!}$. Τότε, όμως, το άθροισμα δε θα ισούται με $e^x - 1$. Επεκτείνοντας το άθροισμα στο άπειρο, δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα επειδή, οι μεγαλύτερες δυνάμεις του x δεν επηρεάζουν το ζητούμενο συντελεστή.
- Άρα, η ΓΣ για όλους τους παίκτες είναι:
  $(e^x-1)^4 = e^{4x} - 4e^{3x} + 6e^{2x} - 4e^x + 1.$
- Η απάντηση στην ερώτηση δίνεται από το συντελεστή του όρου $\frac{x^{52}}{52!}$, που είναι $4^{52} - 4\cdot 3^{52} + 6\cdot 2^{52} - 4$.

Θέμα Ιουνίου 2017: Έχουμε 20 μαρκαδόρους, 6 μαύρους, 10 πράσινους και 4 κόκκινους. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τους μοιράσουμε σε 2 άτομα, ώστε καθένα να πάρει 10 μαρκαδόρους και τουλάχιστον 1 από κάθε χρώμα;

- Υπολογίζουμε με πόσους τρόπους μπορούμε να δώσουμε μαρκαδόρους στο 1ο άτομο, σύμφωνα με τους περιορισμούς, αφού αυτό καθορίζει μοναδικά αυτούς, που θα πάρει το 2ο άτομο.
  Οι γεννήτριες συναρτήσεις είναι:
  Για τους μαύρους μαρκαδόρους: $z + z^2 + z^3 + \ldots + z^5$
  Για τους πράσινους μαρκαδόρους: $z + z^2 + z^3 + \ldots + z^9$
  Για τους κόκκινους μαρκαδόρους: $z + z^2 + z^3$

Δηλ. τελικά:
$(z + z^2 + z^3 + ... + z^5)(z + z^2 + z^3 + ... + z^9)(z + z^2 + z^3)$
Το ζητούμενο πλήθος τρόπων δίνεται από το συντελεστή του z^{10} στην παραπάνω παράσταση που είναι 15.

Θέμα Σεπτεμβρίου 2017: Με πόσους τρόπους μπορούμε να εκτυπώσουμε 25 διαφορετικά αρχεία σε 3 διαφορετικούς εκτυπωτές, με τον περιορισμό ότι κάθε εκτυπωτής πρέπει να εκτυπώσει τουλάχιστον ένα αρχείο;

- Ουσιαστικά ψάχνουμε το πλήθος των τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να διατάξουμε 25 αντικείμενα επιλεγμένα από 3 αντικείμενα, όταν επιτρέπονται επαναλήψεις των 3 αντικειμένων.
- Για τον 1ο εκτυπωτή - αφού πρέπει οπωσδήποτε να λάβει ένα τουλάχιστον αρχείο - η γεννήτρια συνάρτηση είναι:
$z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^{25}}{25!} = e^z - 1.$
Όμοια για το 2ο και 3ο εκτυπωτή.

- Η τελική γεννήτρια συνάρτηση για όλους τους εκτυπωτές είναι: $(e^z - 1)^3$ και το πλήθος των ζητούμενων τρόπων δίνεται από το συντελεστή του $\dfrac{z^{25}}{25!}$ στο $(e^z - 1)^3$.

Κάνουμε πράξεις:

$$(e^z - 1)^3 = e^{3z} - 3e^{2z} + 3e^z - 1 =$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} 3^r \frac{z^r}{r!} - 3\sum_{r=0}^{\infty} 2^r \frac{z^r}{r!} + 3\sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{r!} - 1 =$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} (3^r - 3 \cdot 2^r + 3)\frac{z^r}{r!} - 1$$

Επομένως, ο συντελεστής του $\dfrac{z^{25}}{25!}$ είναι $3^{25} - 3 \cdot 2^{25} + 3$.

Θέμα φεβρουαρίου 2017: Να λυθεί

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n, T(1) = 1$$

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n = 2[2T(\frac{n}{2^2}) + \frac{n}{2}] + n =$$
$$= 2^2T(\frac{n}{2^2}) + 2n = 2^2[2T(\frac{n}{2^3}) + \frac{n}{2^2}] + 2n =$$
$$= 2^3T(\frac{n}{2^3}) + 3n = \ldots = 2^iT(\frac{n}{2^i}) + in$$

Επομένως αν $n = 2^i$, έχουμε,

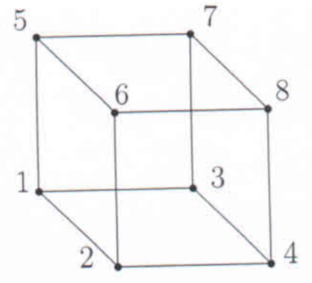
$$T(n) = n + n\log n \Longrightarrow T(n) = O(n\log n)$$

Θέμα Σεπτεμβρίου 2017: Να λυθεί η σχέση αναδρομής $a_n = 10a_{n-1}^2$, για $n \geqslant 1$, $a_0 = 1$

Θέτουμε: $b_n = \log a_n$ με $b_0 = \log 1 = 0$ και επίσης, $\log a_n = \log 10 + \log a_{n-1}^2 \Rightarrow \log a_n = 2\log a_{n-1} + \log 10 \Rightarrow b_n = 2b_{n-1} + 1$.
Η τελευταία έχει λύση $b_n = 2^{n+1} - 1 \quad \forall n \in N$, άρα
$a_n = 10^{b_n} \Rightarrow a_n = 10^{2^{n+1}-1} \quad \forall n \in N$.

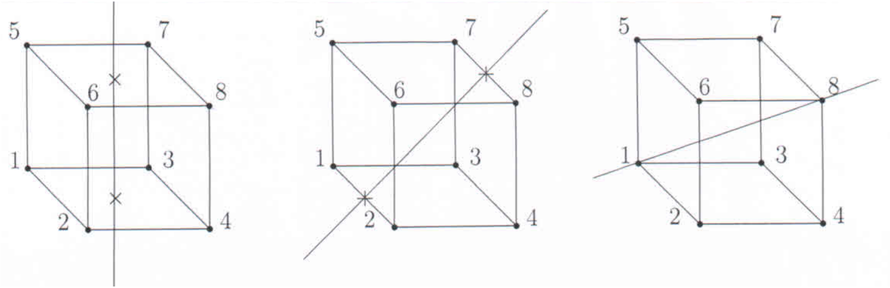
Θέμα Φεβρουαρίου 2017: Οι πλευρές ενός κύβου βάφονται ως εξής: 2 πλευρές κόκκινες, 2 πλευρές μπλε και 2 πλευρές πράσινες. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του *Polya* να βρείτε: Τις συμμετρίες και να τις περιγράψετε. Τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους μπορούν να βαφούν οι πλευρές.

Το σύνολο G των κατάλληλων περιστροφών του κύβου προκύπτει ως εξής:



κορυφές	πλευρές
1, 2, 3, 4	a
1, 2, 5, 6	b
1, 3, 5, 7	c
3, 4, 7, 8	d
2, 4, 6, 8	e
5, 6, 7, 8	f

Περιγράφουμε τις κατάλληλες περιστροφές του κύβου με τις μεταθέσεις των a, b, c, d, e, f.
Μαζί με την ταυτοτική $(a), (b), (c), (d), (e), (f)$ υπάρχουν 3 ειδών μεταθέσεις:



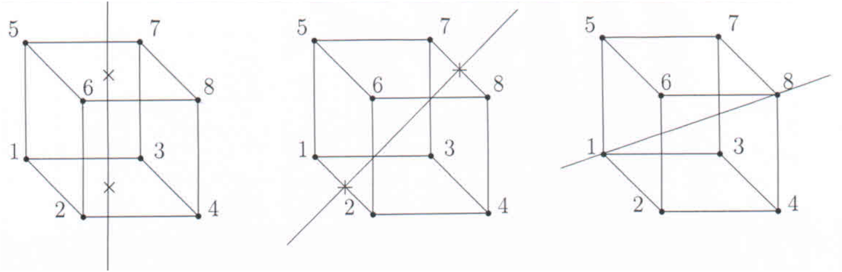
1. Περιστροφές γύρω από τον άξονα, που περνάει από τα κέντρα 2 απέναντι πλευρών (υπάρχουν 3 επιλογές για το ζευγάρι των πλευρών και επομένως, 3 μη-ταυτοτικές περιστροφές). Δύο είναι του τύπου $(bcde)$ και μία του τύπου $(bd)(ce)$.
2. Περιστροφές κατά π γύρω από άξονα, που περνάει από τα μέσα δύο διαγωνίως αντιθέτων ακμών (υπάρχουν 6 τέτοια ζευγάρια που δίνουν μεταθέσεις του τύπου $(ab)(ce)(df)$).
3. Περιστροφές κατά $2\pi/3$ και $4\pi/3$ γύρω από άξονα δύο διαγωνίως αντιθέτων κορυφών (π.χ. 1 με 8).
   Υπάρχουν 4 τρόποι να διαλέξεις το ζευγάρι των κορυφών και δύο περιστροφές για καθένα, που δίνουν 8 συμμετρίες του τύπου $(abc)(def)$.

Ο παρακάτω πίνακας δίνει τον αριθμό για κάθε τύπο συμμετρίας, το σχετικό πολυώνυμο σε c_1, c_2 και c_3 και το συντελεστή $c_1^2 c_2^2 c_3^2$.

$\sigma \in G$	s	πολυώνυμο	συντελεστής του $c_1^2 c_2^2 c_3^2$
$(a)(b)(c)(d)(e)(f)$	1	$(c_1+c_2+c_3)^6$	$\binom{6}{2}\binom{4}{2} = 90$
$(a)(bcde)(f)$	6	$6(c_1+c_2+c_3)^2(c_1^4+c_2^4+c_3^4)$	0
$(a)(bd)(ce)(f)$	3	$3(c_1+c_2+c_3)^2(c_1^2+c_2^2+c_3^2)^2$	18
$(ab)(ce)(df)$	6	$6(c_1^2+c_2^2+c_3^2)^3$	36
$(abc)(def)$	8	$8(c_1^3+c_2^3+c_3^3)^2$	0
	24		144

Το αποτέλεσμα, επομένως, είναι $\frac{144}{24} = 6$ διαφορετικοί χρωματισμοί.

Το σύνολο G των κατάλληλων περιστροφών του κύβου προκύπτει ως εξής:



κορυφές	πλευρές
1, 2, 3, 4	a
1, 2, 5, 6	b
1, 3, 5, 7	c
3, 4, 7, 8	d
2, 4, 6, 8	e
5, 6, 7, 8	f

Περιγράφουμε τις κατάλληλες περιστροφές του κύβου με τις μεταθέσεις των a, b, c, d, e, f
Μαζί με την ταυτοτική $(a), (b), (c), (d), (e), (f)$ υπάρχουν 3 ειδών μεταθέσεις:

1. Περιστροφές γύρω από τον άξονα, που περνάει από τα κέντρα 2 απέναντι πλευρών (υπάρχουν 3 επιλογές για το ζευγάρι των πλευρών και επομένως 3 μη-ταυτοτικές περιστροφές). Δύο είναι του τύπου $(bcde)$ και μία του τύπου $(bd)(ce)$

2. Περιστροφές κατά π γύρω από άξονα που περνάει από τα μέσα δύο διαγωνίως αντιθέτων ακμών (υπάρχουν 6 τέτοια ζευγάρια που δίνουν μεταθέσεις του τύπου $(ab)(ce)(df)$).

3. Περιστροφές κατά $2\pi/3$ και $4\pi/3$ γύρω από άξονα δύο διαγωνίως αντιθέτων κορυφών (π.χ. 1 με 8)
Υπάρχουν 4 τρόποι να διαλέξεις το ζευγάρι των κορυφών και δύο περιστροφές για καθένα, που δίνουν 8 συμμετρίες του τύπου $(abc)(def)$

Ο παρακάτω πίνακας δίνει τον αριθμό για κάθε τύπο συμμετρίας, το σχετικό πολυώνυμο σε c_1, c_2 και c_3 και το συντελεστή $c_1^2 c_2^2 c_3^2$

$\sigma \in G$	s	πολυώνυμο	συντελεστής του $c_1^2 c_2^2 c_3^2$
$(a)(b)(c)(d)(e)(f)$	1	$(c_1+c_2+c_3)^6$	$\binom{6}{2}\binom{4}{2} = 90$
$(a)(bcde)(f)$	6	$6(c_1+c_2+c_3)^2(c_1^4+c_2^4+c_3^4)$	0
$(a)(bd)(ce)(f)$	3	$3(c_1+c_2+c_3)^2(c_1^2+c_2^2+c_3^2)^2$	18
$(ab)(ce)(df)$	6	$6(c_1^2+c_2^2+c_3^2)^3$	36
$(abc)(def)$	8	$8(c_1^3+c_2^3+c_3^3)^2$	0
	24		144

Το αποτέλεσμα επομένως είναι $\frac{144}{24} = 6$ διαφορετικοί χρωματισμοί

Θέμα Σεπτεμβρίου 2017:Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις πλευρές μιας πυραμίδας με 2 χρώματα;

Η βάση της πυραμίδας παραμένει σταθερή και οι συμμετρίες προκύπτουν μετά από περιστροφή της γύρω από τον κατακόρυφο άξονα.

- $D = \{a, b, c, d\}$, οι πλευρές
- $R = \{x, y\}$, τα χρώματα με $w(x) = x, w(y) = y$
- Έχουμε τις εξής μεταθέσεις: $\pi_1 = \begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} abcd \\ bcad \end{pmatrix}$ και $\pi_3 = \begin{pmatrix} abcd \\ cabd \end{pmatrix}$, δηλ. $|G| = 3$.
- Για την π_1 είναι: x_1^4
- Για την π_2 είναι: $x_1^1 x_3^1$
- Για την π_3 είναι: $x_1^1 x_3^1$

Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις πλευρές μιας πυραμίδας με 2 χρώματα;

- Οπότε: $P_G = \dfrac{x_1^4 + x_1^1 x_3^1 + x_1^1 x_3^1}{3} = \dfrac{x_1^4 + 2x_1^1 x_3^1}{3}$
- Έχουμε 2 χρώματα με βάρη x, y, οπότε:
- Οπότε:
  $P_G = \dfrac{(x+y)^4 + 2(x+y)(x^3+y^3)}{3} = x^4 + y^4 + 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3$
- Θέτοντας $x = y = 1$ έχουμε: $1+1+2+2+2 = 8$ τρόποι, δηλ. διαφορετικοί χρωματισμοί.

Θέμα Ιουνίου 2017:Χρησιμοποιώντας την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού, υπολογίστε πόσες τοποθετήσεις των ψηφίων $0, 1, 2, ..., 9$ υπάρχουν, στις οποίες το πρώτο ψηφίο να είναι μεγαλύτερο από το 1 και το τελευταίο ψηφίο να είναι μικρότερο από το 8.

- Έστω S το σύνολο όλων των πιθανών μεταθέσεων των στοιχείων $0, 1, 2, ..., 9$.
- $|S| = N = 10!$
- c_1: το πρώτο ψηφίο μιας μετάθεσης είναι μικρότερο ή ίσο με 1, $N(c_1) = 2 \cdot 9!$
- c_2: το τελευταίο ψηφίο μιας μετάθεσης είναι μεγαλύτερο ή ίσο με 8, $N(c_2) = 2 \cdot 9!$

Θέμα Ιουνίου 2017:Χρησιμοποιώντας την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού, υπολογίστε πόσες τοποθετήσεις των ψηφίων $0, 1, 2, ..., 9$ υπάρχουν, στις οποίες το πρώτο ψηφίο να είναι μεγαλύτερο από το 1 και το τελευταίο ψηφίο να είναι μικρότερο από το 8.

- Αυτό, που ζητάμε είναι το:
  $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}) = N - N(c_1) - N(c_2) + N(c_1 c_2) =$
  $10! - 2 \cdot 9! - 2 \cdot 9! + 4 \cdot 8! = 2338560.$