Η ύλη συνοπτικά...

- Στοιχειώδης συνδυαστική
- Γεννήτριες συναρτήσεις
- Σχέσεις αναδρομής
- Θεωρία Μέτρησης Pólya
- Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού

Σχέσεις Αναδρομής

- Γραμμικές Σχέσεις Αναδρομής με σταθερούς συντελεστές
- Μη Γραμμικές Σχέσεις Αναδρομής - Ειδικές μέθοδοι λύσης

Γύρω στα 1200 μ.Χ. ο Leonardo da Pisa, πιο γνωστός σαν Fibonacci, ανακάλυψε και μελέτησε την ακολουθία αριθμών Fibonacci. Ο Fibonacci παρουσίαζε αυτήν την ακολουθία αριθμών λέγοντας την πιο κάτω ιστορία: *'Σε ένα νησί υπάρχει αρχικά ένα ζευγάρι από κουνέλια. Κάθε ζεύγος κουνελιών έχει τη δυνατότητα μετά από ένα μήνα ζωής να αναπαράγει ένα άλλο ζεύγος από κουνέλια μέσα σε ένα μήνα. Αυτό μας λέει ότι το κουνέλι για να γεννήσει πρέπει να ενηλικιωθεί, δηλαδή να γίνει ενός μηνός. Γεννήσεις συμβαίνουν κάθε μήνα. Τα κουνέλια ποτέ δεν πεθαίνουν και ποτέ δεν σταματάνε να αναπαράγουν'.* Ας προσπαθήσουμε να δώσουμε μια λύση στο πρόβλημα του υπολογισμού του αριθμού των κουνελιών μετά από ένα δεδομένο διάστημα.

Ας είναι α_n ο αριθμός των ζευγαριών των κουνελιών μετά από n μήνες. Ας είναι N_n τα νεογεννηθέντα ζευγάρια (δηλαδή αυτά, που γεννήθηκαν στο μήνα n) και O_n τα παλιά ζευγάρια (δηλαδή, αυτά που γεννήθηκαν στους μήνες $1, \ldots, n-1$).
Επομένως, είναι:

$$\alpha_n = N_n + O_n$$

Οι κανόνες της ιστορίας μας λένε ότι τον επόμενο μήνα θα συμβούν τα εξής γεγονότα:
$O_{n+1} = O_n + N_n = \alpha_n$ - τα παλιά ζευγάρια τη χρονική στιγμή $(n+1)$ έχουν αυξηθεί με αυτά, που γεννήθηκαν τη χρονική στιγμή n.

$N_{n+1} = O_n$ - κάθε παλιό ζευγάρι στη χρονική στιγμή n παράγει ένα νεογέννητο ζευγάρι τη χρονική στιγμή $n+1$.
Κατά τη διάρκεια του επόμενου μήνα έχουμε:

$$O_{n+2} = O_{n+1} + N_{n+1} = \alpha_{n+1}$$
$$N_{n+2} = O_{n+1}$$

Συνδυάζοντας τις πιο πάνω εξισώσεις έχουμε:

$$\alpha_{n+2} = O_{n+2} + N_{n+2} = (O_{n+1} + N_{n+1}) + (O_n + N_n) = \alpha_{n+1} + \alpha_n$$

Η πιο πάνω σχέση είναι μια σχέση αναδρομής. Οι αρχικές συνθήκες χρειάζονται, αλλά δεν έχουν και μεγάλη σημασία. Για τους αριθμούς Fibonacci, συνήθως, είναι $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$, ή $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$.

Σχέσεις Αναδρομής

- Γραμμικές Σχέσεις Αναδρομής με σταθερούς συντελεστές

Μια σχέση αναδρομής, που έχει την εξής μορφή

$$c_0\alpha_n + c_1\alpha_{n-1} + c_2\alpha_{n-2} + \ldots + c_r\alpha_{n-r} = f(n) \qquad (1)$$

με $c_0, c_1, \ldots, c_r$ σταθερούς αριθμούς ονομάζεται γραμμική σχέση αναδρομής με σταθερούς συντελεστές, r-τάξης ή r-βαθμού. Οι τιμές της ακολουθίας $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$ ονομάζονται αρχικές συνθήκες της σχέσης αναδρομής.
Η $\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} - \alpha_n = 0$ είναι μια τέτοια σχέση αναδρομής. Η συνάρτηση $f(n)$ ονομάζεται οδηγός συνάρτηση.
Αν η $f(n) = 0$, τότε η σχέση αναδρομής λέγεται ομογενής. Στην περίπτωση, που $f(n) \neq 0$ λέγεται μη ομογενής.

Λύση με τη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξίσωσης

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η γενική λύση μιας γραμμικής σχέσης αναδρομής με σταθερούς συντελεστές μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα δύο μερών: της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς σχέσης και μιας μερικής λύσης της δεδομένης μη ομογενούς σχέσης. Άρα, το πρόβλημα της εύρεσης της γενικής λύσης της σχέσης αναδρομής ανάγεται στο πρόβλημα της εύρεσης της γενικής λύσης της ομογενούς και μιας μερικής λύσης της δεδομένης μη ομογενούς. Ας είναι $\alpha_n^{(h)}$ η λύση της γενικής ομογενούς και $\alpha_n^{(p)}$ μια μερική λύση της μη ομογενούς. Είναι:

$$c_0\alpha_n^{(h)} + c_1\alpha_{n-1}^{(h)} + \ldots + c_r\alpha_{n-r}^{(h)} = 0$$
$$c_0\alpha_n^{(p)} + c_1\alpha_{n-1}^{(p)} + \ldots + c_r\alpha_{n-r}^{(p)} = f(n)$$

Επομένως

$$c_0\left(\alpha_n^{(h)}+\alpha_n^{(p)}\right)+c_1\left(\alpha_{n-1}^{(h)}+\alpha_{n-1}^{(p)}\right)+\ldots+c_r\left(\alpha_{n-r}^{(h)}+\alpha_{n-r}^{(p)}\right)=f(n) \quad (2)$$

Προφανώς, η πλήρης λύση, $\alpha_n=\alpha_n^{(h)}+\alpha_n^{(p)}$, ικανοποιεί τη σχέση αναδρομής. *Ο σκοπός θα είναι να ξεφύγουμε από τη σχέση αναδρομής και να καταλήξουμε σε ένα κλειστό τύπο, που μας δίνει το α_n συναρτήσει του n.*

(A) Εύρεση ομογενούς λύσης

Δοκιμάζουμε μια λύση της μορφής $\alpha_n^{(h)} = Ax^n$, όπου x ονομάζεται χαρακτηριστική ρίζα και A είναι μια σταθερά, που θα υπολογιστεί από τις αρχικές συνθήκες. Αντικαθιστώντας αυτή τη λύση, στη σχέση αναδρομής, παίρνουμε:

$$c_0Ax^n + c_1Ax^{n-1} + c_2Ax^{n-2} + \ldots + c_rAx^{n-r} = 0 \Leftrightarrow$$
$$c_0x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \ldots + c_rx^{n-r} = 0 \qquad (3)$$

Η (3) ονομάζεται χαρακτηριστική εξίσωση της σχέσης αναδρομής και έστω ότι έχει διαφορετικές πραγματικές ρίζες τις $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Τότε αποδεικνύεται ότι η γενική λύση της ομογενούς είναι:

$$\alpha_n^{(h)} = A_1x_1^n + A_2x_2^n + \ldots + A_rx_r^n$$

Τα $A_1, A_2, \ldots, A_r$ θα υπολογιστούν από τις αρχικές συνθήκες.

Η σχέση αναδρομής για τους αριθμούς Fibonacci είναι:

$$\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} + \alpha_n$$

ή

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$$

Έστω ότι οι αρχικές συνθήκες είναι: $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Οι ρίζες είναι:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Ο αριθμός:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,16803$$

είναι ο λεγόμενος ‘χρυσός λόγος‘. (Αναλογία μεγεθών, που έχει χρησιμοποιηθεί από την εποχή του Φειδία στην κλασική τέχνη. Λέγεται ότι ευχαριστεί τις αισθήσεις). Σε αυτή την περίπτωση, η ομογενής λύση είναι και η πλήρης λύση και δίνεται από τον τύπο:

$$\alpha_n = \alpha_n^{(h)} = A_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + A_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Οι δυο σταθερές A_1, A_2 υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, στις δυο εξισώσεις:

$$\alpha_0 = A_1 + A_2 = 1,\ \alpha_1 = A_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + A_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

και

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ A_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Επομένως,

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \square$$

Θα αναφερθούμε τώρα στην περίπτωση, κατά την οποία, μερικές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι μιγαδικοί αριθμοί. Επειδή, οι συντελεστές της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι πραγματικοί, αν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει ρίζα ένα μιγαδικό, τότε έχει και το συζυγή του.
Ας είναι $x_1 = \alpha + ib$ και $x_2 = \alpha - ib$ το ζευγάρι των μιγαδικών ριζών.
Η αντίστοιχη ομογενής λύση είναι:

$$\begin{aligned} A_1 (X_1)^n + A_2 (X_2)^n &= A_1 (\alpha + ib)^n + A_2 (\alpha - ib)^n \\ &= B_1 p^n \cos (n\vartheta) + B_2 p^n \sin (n\vartheta) \end{aligned}$$

όπου

$$p = \sqrt{\alpha^2 + b^2}$$

και

$$\vartheta = \tan^{-1} (b/\alpha) , B_1 = (A_1 + A_2) , B_2 = i (A_1 - A_2)$$

.

Μας μένει η περίπτωση να έχουμε πολλαπλές ρίζες για τη χαρακτηριστική εξίσωση.
Ας είναι X_1 k-πολλαπλότητας ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Τότε, αποδεικνύεται ότι η ομογενής λύση είναι:

$$\left(A_1 n^{k-1} + A_2 n^{k-2} + \ldots + A_{k-2} n^2 + A_{k-1} n + A_k\right) X_1^n$$

- Να λυθεί η σχέση αναδρομής:

$$4\alpha_n - 20\alpha_{n-1} + 17\alpha_{n-2} - 4\alpha_{n-3} = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση, είναι:

$$4x^3 - 20x^2 + 17x - 4 = 0$$

και οι ρίζες:

$$x_1 = x_2 = 1/2, x_3 = 4$$

Άρα, η ομογενής λύση, που σε αυτή την περίπτωση είναι και πλήρης λύση, είναι:

$$\alpha_n^{(h)} = (A_1 n + A_2)(1/2)^n + A_3 4^n$$

Τα A_1, A_2, και A_3 υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες. $\square$

(B) Εύρεση μιας μερικής λύσης

Δεν υπάρχει γενικός κανόνας. Μπορούμε, όμως, να πούμε πως η μερική λύση "μοιάζει" με την οδηγό συνάρτηση. Δηλαδή, ανάλογα με το τι είναι η οδηγός συνάρτηση δοκιμάζουμε και μια μερική λύση. Ο πιο κάτω πίνακας δίνει μερικά παραδείγματα:

Μορφή $f(n)$	Μορφή μερικής λύσης
k, σταθερά	C, σταθερά
πολυώνυμο	πολυώνυμο ίδιου βαθμού αλλά πλήρες
$k\lambda^n, \quad k, \lambda$ σταθερές	$c\beta^n, \quad c, \beta$ σταθερές

Οι σταθερές της μερικής λύσης υπολογίζονται αντικαθιστώντας την υποψήφια λύση στην μη ομογενή σχέση αναδρομής.

- Να λυθεί η σχέση αναδρομής:

$$6\alpha_n - 5\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} = 6\,(1/5)^n \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$
$$\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 6/5$$

(α) Ομογενής λύση:
Χαρακτηριστική εξίσωση, $6x^2 - 5x + 1 = 0$
οι ρίζες είναι, $x_1 = 1/2, x_2 = 1/3$.
Άρα, η ομογενής λύση είναι:

$$\alpha_n^{(h)} = A_1 (1/2)^n + A_2 (1/3)^n$$

(β) Μερική λύση:
Η μορφή της οδηγού συνάρτησης $f(n)$, μας επιβάλλει να δοκιμάσουμε μια μερική λύση της μορφής $\alpha_n^{(p)} = B (1/5)^n$.
Δηλαδή:

$$6B (1/5)^n - 5B (1/5)^{n-1} + B (1/5)^{n-2} = 6 (1/5)^n \Rightarrow$$
$$(6/25) B - B + B = 6/25 \Rightarrow B = 1$$

Άρα, η πλήρης λύση είναι:

$$\alpha_n = \alpha_n^{(p)} + \alpha_n^{(h)} = A_1\,(1/2)^n + A_2\,(1/3)^n + (1/5)^n\,\square$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε:

$$\alpha_0 = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^0 + A_2\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 0 \quad A_1 + A_2 = -1$$

$$\alpha_1 = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^1 + A_2\left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{6}{5} \quad \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{3} = 1$$

$$A_1 = 8 \text{ και } A_2 = -9$$

Άρα, η πλήρης λύση είναι:

$$\alpha_n = (1/2)^{n-2} - (1/3)^{n-2} + (1/5)^n\,, \;\; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Λύση με τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων

Ας είναι $A(x)$ η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας:

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$$

δηλαδή,

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$$

Έστω ότι έχουμε την εξής σχέση αναδρομής:

$$c_0\alpha_n + c_1\alpha_{n-1} + \ldots + c_r\alpha_{n-r} = f(n) \tag{4}$$

η οποία έχει φυσική σημασία και ισχύει μόνο για εκείνα τα n, τα οποία είναι μεγαλύτερα ή ίσα από κάποιον ακέραιο $k \geq r$. Ενδιαφερόμαστε να προσδιορίσουμε τις τιμές εκείνων των α_n για τα οποία $n \geq k - r$, διότι μόνο αυτά τα α_n σχετίζονται με τη σχέση αναδρομής. Από αυτά, τα $\alpha_{k-r}, \alpha_{k-r+1}, \ldots, \alpha_{k-1}$ θεωρούνται δεδομένα ως αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Από την (4), πολλαπλασιάζοντας με x_n και αθροίζοντας έχουμε:

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left(c_0 \alpha_n + c_1 \alpha_{n-1} + \ldots + c_r \alpha_{n-r} \right) x^n = \sum_{n=k}^{\infty} f(n)\, x^n \qquad (5)$$

Από την ιδιότητα της ολίσθησης των γεννητριών συναρτήσεων έχουμε:

$$\sum_{n=k}^{\infty} c_0 \alpha_n x^n = c_0 \left[A(x) - \alpha_0 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - \ldots - \alpha_{k-1} x^{k-1} \right]$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} c_1 \alpha_{n-1} x^n = c_1 x \left[A(x) - \alpha_0 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - \ldots - \alpha_{k-2} x^{k-2} \right]$$

$$\ldots$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} c_r \alpha_{n-r} x^n = c_r x^r \left[A(x) - \alpha_0 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - \ldots - \alpha_{k-r-1} x^{k-r-1} \right]$$

Λύνοντας την (5) ως προς $A(x)$ και κάνοντας αντικαταστάσεις έχουμε ότι:

$$A(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{k-r-1} x^{k-r-1} + \frac{1}{c_0 + c_1 x + \ldots + c_r x^r} B(x)$$

όπου:

$$\begin{aligned} B(x) = \sum_{n=k}^{\infty} f(n) x^n &+ c_0 \left(\alpha_{k-r} x^{k-r} + \ldots + \alpha_{k-1} x^{k-1} \right) \\ &+ c_1 \left(\alpha_{k-r} x^{k-r+1} + \ldots + \alpha_{k-2} x^{k-1} \right) \\ &\ldots \\ &+ c_{r-1} \alpha_{k-r} x^{k-1} \end{aligned}$$

- Να λυθεί το:

$$6\alpha_n - 5\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} = 6\,(1/5)^n \quad n = 2,3,4,\ldots$$
$$\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 6/5$$

με τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων.

Έχουμε:

$$6\alpha_n - 5\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} = 6\,(1/5)^n\,, \quad \alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 6/5$$

Επομένως,

$$\sum_{n=2}^{\infty} 6\alpha_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 5\alpha_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_{n-2} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} 6\,(1/5)^n\, x^n$$

$$6\,[A\,(x) - \alpha_0 - \alpha_1 x] - 5x\,[A\,(x) - \alpha_0] + x^2 A\,(x) = \frac{6\,(1/5)^2\, x^2}{1 - (1/5)\,x} \Rightarrow$$

$$A\,(x) = (1/5)\,\frac{x\,(6-x)}{[1-(1/3)\,x]\,[1-(1/2)\,x]\,[1-(1/5)\,x]} \Rightarrow$$

$$A\,(x) = \frac{-9}{1-(1/3)\,x} + \frac{8}{1-(1/2)\,x} + \frac{1}{1-(1/5)\,x} \Rightarrow$$

$$\alpha_n = (1/2)^{n-2} - (1/3)^{n-2} + (1/5)^n\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \square$$

- Δίνονται οι 2 παρακάτω σχέσεις αναδρομής, που σχετίζονται μεταξύ τους

$$\alpha_r = 3\alpha_{r-1} + 2b_{r-1}$$
$$b_r = \alpha_{r-1} + b_{r-1}$$

με

$$\alpha_0 = 1, \quad b_0 = 0.$$

Να βρεθούν κλειστοί τύποι για τις ακολουθίες α_r και b_r.

Θα βρούμε κλειστό τύπο για τα α_r, b_r με τη βοήθεια των γεννητριών συναρτήσεων.
Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r x^r = \sum_{r=1}^{\infty} 3\alpha_{r-1} x^r + \sum_{r=1}^{\infty} 2b_{r-1} x^r$$
$$\sum_{r=1}^{\infty} b_r x^r = \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_{r-1} x^r + \sum_{r=1}^{\infty} b_{r-1} x^r$$

με $A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^r$, $B(x) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r$

Από τις ιδιότητες των γεννητριών συναρτήσεων έχουμε:

$$\begin{aligned} A(x) - 1 &= 3xA(x) + 2xB(x) \\ B(x) &= xA(x) + xB(x) \end{aligned}$$

Λύνοντας ως προς $A(x), B(x)$ βρίσκουμε ότι:

$$A(x) = \frac{1-x}{1-4x+x^2} = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)/6}{1-\left(2+\sqrt{3}\right)x} + \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)/6}{1-\left(2-\sqrt{3}\right)x}$$

και στη συνέχεια, με μερική κλασματική ανάλυση:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{3+\sqrt{3}}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)^n \\ b_n &= \frac{\sqrt{3}}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \frac{\sqrt{3}}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)^n \square \end{aligned}$$

- Έστω ότι στρίβουμε ένα νόμισμα n φορές.Υπάρχουν, προφανώς, 2^n ακολουθίες πιθανών αποτελεσμάτων. Ποιος είναι ο αριθμός των ακολουθιών των αποτελεσμάτων, στις οποίες ποτέ δεν εμφανίζεται ‘Κεφάλι’ (Κ) σε διαδοχικά στριψίματα;

Έστω μία ακολουθία μήκους n από Κ και Γ, που δίνει ένα πιθανό αποτέλεσμα. Ας πάρουμε την τελευταία θέση στην ακολουθία και ας τη σημειώσουμε σαν 'ξεχωριστή θέση'. Τότε, αν α_n είναι ο αριθμός των ακολουθιών μήκους n, στις οποίες δεν έχουμε δύο διαδοχικά Κ, θα έχουμε την εξής σχέση: Εάν στη θέση n, που ξεχωρίσαμε, έχουμε Γ, τότε θεωρούμε τις θέσεις από 1 εώς $n-1$ σαν μία νέα ακολουθία μήκους $n-1$, στην οποία πάλι δεν πρέπει να έχουμε δύο Κ γειτονικά, ενώ αν στη θέση n έχουμε Κ, τότε επειδή στη θέση $n-1$ πρέπει υποχρεωτικά να έχουμε Γ, παίρνουμε σαν νέα ακολουθία τις θέσεις από 1 έως $n-2$. Σ' αυτές η ακολουθία μήκους $n-2$ δεν πρέπει να έχει δύο διαδοχικά Κ. Έτσι, έχουμε την ομογενή αναδρομική σχέση $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$, με αρχικές συνθήκες $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_2 = 3$.

Αυτή έχει χαρακτηριστική εξίσωση:

$$x^2 - x - 1 = 0 \Longrightarrow (x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \vee x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})$$

Έτσι,

$$\alpha_n = A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \overbrace{\Longrightarrow}^{n=1,2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1+\sqrt{5}}{2}A + \frac{1-\sqrt{5}}{2}B = 2 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}A + \frac{3-\sqrt{5}}{2}B = 3 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \\ B = \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \end{array} \right\}$$

Άρα,

$$\alpha_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n, \ \forall n \in N^*.$$

- Να βρεθεί η σχέση αναδρομής, που περιγράφει το εξής πρόβλημα:
  'α_r είναι ο αριθμός των λέξεων με r γράμματα από το αλφάβητο $\{0, 1, 2\}$ με τον περιορισμό ότι το γράμμα 0 θα επιλεγεί ζυγές φορές '

  $\alpha_r =;$

Ποια είναι η διαφορά με την προηγούμενη άσκηση;

Η προηγούμενη άσκηση μετράει 1 φορά την <u>ΕΠΙΛΟΓΗ</u> $0, 1, 0$, ΕΝΩ ΑΥΤΗ ΜΕΤΡΑΕΙ $010, 001, 100$, ΔΗΛΑΔΗ 3 ΦΟΡΕΣ!!!
Αυτό συμβαίνει, γιατί η προηγούμενη άσκηση <u>μετράει επαναλήψεις</u>, ενώ αυτή <u>μετράει</u> διατάξεις!!!

Με 0 γράμματα 1 λέξη $\Rightarrow \alpha_0 = 1$
Υπάρχουν 3^k λέξεις k-γραμμάτων.

$\alpha_k \sim$ οι λέξεις k-γραμμάτων με ζυγό αριθμό 0
$3^k - \alpha_k \sim$ οι λέξεις k-γραμμάτων, που περιέχουν μονό αριθμό 0.

Όλες οι λέξεις $k+1$ γραμμάτων έχουν μορφή wu
w – λέξη k-γραμμάτων
u – 0 ή 1 ή 2

1. w περιέχει ζυγό αριθμό 0 και $u = 0 \rightarrow \alpha_k$
2. w περιέχει ζυγό αριθμό 0 και $u = 1$ ή $u = 2 \rightarrow 2\alpha_k$
3. w περιέχει μονό αριθμό 0 και $u = 0 \rightarrow 3^k - \alpha_k$
4. w περιέχει μονό αριθμό 0 και $u = 1$ ή $u = 2 \rightarrow 2(3^k - \alpha_k)$

Μας ενδιαφέρουν οι περιπτώσεις (2) και (3), γιατί αυτές συνεχίζουν να έχουν ζυγό αριθμό 0!!!
$\alpha_{k+1} = 2\alpha_k + 3^k - \alpha_k \Rightarrow$
$\alpha_{k+1} - \alpha_k = 3^k$
Αν την λύσουμε $\Rightarrow \alpha_k = \frac{3^k+1}{2}$

- Πόσες νόμιμες αριθμητικές εκφράσεις μήκους n χωρίς παρενθέσεις κατασκευάζονται από τα στοιχεία $0, 1, 2, \ldots, 9$ και τα σύμβολα των δυαδικών πράξεων $+, *$ και $/$.

Για κάθε θετικό ακέραιο n έστω α_n ο ζητούμενος αριθμός των νόμιμων αριθμητικών εκφράσεων μήκους n, που κατασκευάζονται από τα δέκα δεκαδικά ψηφία και τους τρεις δυαδικούς τελεστές. Τότε, προφανώς $\alpha_1 = 10$, αφού οι μόνες νόμιμες εκφράσεις μήκους 1 είναι τα 10 δεκαδικά ψηφία. Επίσης, έχομε $\alpha_2 = 100$, διότι οι μόνες νόμιμες εκφράσεις μήκους δύο είναι οι 00,01,...,99. Θεωρούμε ότι δεν χρησιμοποιούνται περιττά '+' μπροστά από θετικούς αριθμούς.

Για $n \geq 3$ διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις για το α_n :

- Εάν x είναι μία αριθμητική έκφραση με $n-1$ σύμβολα, το τελευταίο σύμβολο πρέπει να είναι ένα ψηφίο. Με προσθήκη στα δεξιά αυτού του ψηφίου ενός ακόμα ψηφίου μπορούμε να πάρουμε $10\alpha_{n-1}$ αριθμητικές εκφράσεις n ψηφίων, όπου τα δύο τελευταία τους σύμβολα είναι δεκαδικά ψηφία.
- Έστω y μία έκφραση $n-2$ συμβόλων. Για να πάρουμε μία έκφραση n συμβόλων (που, δεν προκύπτει από την προηγούμενη περίπτωση) προσθέτομε στα δεξιά της y μία από τις 29 εκφράσεις δύο συμβόλων $+1, \ldots, +9, +0$, $*1, \ldots, *9, *0$, $/1, \ldots, /9$.

Από τις παραπάνω δύο περιπτώσεις παίρνουμε τη σχέση αναδρομής,

$$\alpha_n = 10\alpha_{n-1} + 29\alpha_{n-2}$$

όπου $n \geq 2$ και $\alpha_1 = 10, \alpha_2 = 100$. Η παραπάνω σχέση είναι ομογενής αναδρομική σχέση 2ου βαθμού με χαρακτηριστική εξίσωση,

$$x^2 - 10x - 29 = 0 \Longrightarrow (x = 5 - 3\sqrt{6} \vee x = 5 + 3\sqrt{6})$$

Άρα, έχει γενική λύση της μορφής,

$$\alpha_n = A(5 - 3\sqrt{6})^n + B(5 + 3\sqrt{6})^n$$

και αφού, $\alpha_1 = 10, \alpha_2 = 100$ παίρνουμε τις εξισώσεις,

$$\left\{ \begin{array}{l} (5 - 3\sqrt{6})A + (5 + 3\sqrt{6})B = 10 \\ (79 - 30\sqrt{6})A + (79 + 30\sqrt{6})B = 100 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -\frac{5}{3\sqrt{6}} \\ B = \frac{5}{3\sqrt{6}} \end{array} \right\}$$

Συνεπώς, τελικά, η γενική λύση της ομογενούς αναδρομικής σχέσης, η οποία αποτελεί και την απάντηση στο πρόβλημα, που τέθηκε, είναι η

$$\alpha_n = -\frac{5}{3\sqrt{6}}(5-3\sqrt{6})^n + \frac{5}{3\sqrt{6}}(5+3\sqrt{6})^n.$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ:

x_n	ο αριθμός των ακολουθιών, που αρχίζουν από α ή β και τα α, β ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΓΕΙΤΟΝΙΚΑ.
y_n	ο αριθμός των ακολουθιών, που αρχίζουν από γ ή δ και τα α, β ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΓΕΙΤΟΝΙΚΑ.

ΠΡΟΣΠΑΘΗΣΕ να βρεις σχέσεις αναδρομής για τα x_n, y_n.

Αν έχουμε μία ακολουθία $n-1$, στην οποία τα α, β ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΓΕΙΤΟΝΙΚΑ ΜΠΟΡΟΥΜΕ να ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΟΥΜΕ ΣΤΗΝ ΑΡΧΗ ΤΗΣ

1. γ ή δ ή β εάν αρχίζει από β.
2. γ ή δ ή α εάν αρχίζει από α.
3. α ή β ή γ ή δ εάν αρχίζει από γ ή δ.

Επομένως, έχουμε:

$x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1}$

$y_n = 2x_{n-1} + 2y_{n-1}$

Οι πιο πάνω σχέσεις προκύπτουν από μετάβαση ακολουθιών μήκους $n-1$ σε ακολουθίες μήκους n σύμφωνα με τα (1), (2) και (3)

$x_0 = y_0 = 1$ (ΚΕΝΗ ΛΕΞΗ)

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n-1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2y_{n-1} z^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2y_{n-1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2y_{n-1} z^n$$

Με αντικατάσταση και ιδιότητες:

$\mathbb{X}(z) - x_0 = z\mathbb{X}(z) + 2z\mathbb{Y}(z)$

$\mathbb{Y}(z) - y_0 = 2z\mathbb{X}(z) + 2z\mathbb{Y}(z)$

$\vdots$ πράξεις

$\boxed{x_n + y_n}$