# Σχέσεις Αναδρομής

- Μη Γραμμικές Σχέσεις Αναδρομής - Ειδικές μέθοδοι λύσης

# Λύση της τηλεσκοπικής σχέσης αναδρομής

Η γενική μορφή της τηλεσκοπικής σχέσης αναδρομής είναι η εξής:

$$
\begin{aligned}
T(1) &= 1 \\
T(n) &= \alpha T(n/b) + d(n)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Η συνάρτηση $d(n)$ λέγεται οδηγός συνάρτηση. Σημειώνεται ότι η (1) έχει νόημα, όταν το $n$ είναι ακέραια δύναμη του $b$. Αλλά, εάν υποθέσουμε ότι η $T(n)$ είναι λεία (δηλαδή, έχει παραγώγους κάθε τάξης) και πάρουμε ένα καλό άνω όριο για την $T(n)$, αυτές οι τιμές του $n$ μας δίνουν πληροφορία για το ρυθμό αύξησης της συνάρτησης $T(n)$.

Για να μιλήσουμε για τους ρυθμούς, που αυξάνουν οι συναρτήσεις θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό "κεφαλαίο όμικρον" ($big - oh$). Για παράδειγμα, όταν θα λέμε ότι η $T(n)$ είναι $O(n^2)$, θα εννοούμε ότι υπάρχουν θετικές σταθερές $c$ και $n_0$, τέτοιες ώστε για $n$ ίσο ή μεγαλύτερο από το $n_0$, έχουμε ότι $T(n) \leq cn^2$.
Ας είναι $T(n) = (n+1)^2$. Παρατηρούμε ότι η $T(n)$ είναι $O(n^2)$. Πράγματι, αρκεί να πάρουμε $n_0 = 1$ και $c = 4$. Αυτό συμβαίνει γιατί για $n \geq 1$ ισχύει ότι $(n+1)^2 \leq 4n^2$.
Με άλλα λόγια, όταν λέμε ότι η $T(n)$ είναι $O(f(n))$, αυτό σημαίνει ότι η $f(n)$ είναι ένα πάνω όριο στο ρυθμό αύξησης της $T(n)$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \alpha T(n/b) + d(n) \\
&= \alpha \left[ \alpha T\left(\frac{n}{b^2}\right) + d\left(\frac{n}{b}\right) \right] + d(n) \\
&= \alpha^2 T\left(\frac{n}{b^2}\right) + \alpha d\left(\frac{n}{b}\right) + d(n) \\
&= \alpha^2 \left[ \alpha T\left(\frac{n}{b^3}\right) + d\left(\frac{n}{b^2}\right) \right] + \alpha d\left(\frac{n}{b}\right) + d(n) \\
&= \alpha^3 T\left(\frac{n}{b^3}\right) + \alpha^2 d\left(\frac{n}{b^2}\right) + \alpha d\left(\frac{n}{b}\right) + d(n) \\
&\dots \\
&= \alpha^i T\left(\frac{n}{b^i}\right) + \sum_{j=0}^{i-1} \alpha^j d\left(\frac{n}{b^j}\right)
\end{aligned}
$$

Εάν τώρα υποθέσουμε ότι $n = b^k$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι $T\left(\frac{n}{b^k}\right) = T(1) = 1$ και να πάρουμε, με $i = k$ τη σχέση:

$$T(n) = \alpha^k + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j d\left(b^{k-j}\right)$$

Είναι $k = \log_b n$, άρα:

$$T(n) = \alpha^{\log_b n} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j d\left(b^{k-j}\right) \tag{2}$$

Ο πρώτος όρος, ο $\alpha^{\log_b n}$, ονομάζεται ομογενής λύση σε αναλογία με την ορολογία, που χρησιμοποιήσαμε στις γραμμικές σχέσης αναδρομής με σταθερούς συντελεστές. Προφανώς, αν η οδηγός συνάρτηση $d(n)$ είναι 0, τότε η ομογενής λύση είναι η ακριβής λύση για την τηλεσκοπική σχέση αναδρομής.

Ο δεύτερος όρος ονομάζεται μερική λύση και είναι δύσκολο να υπολογιστεί ακόμα και αν ξέρουμε ακριβώς την οδηγό συνάρτηση $d(n)$.

Υπάρχουν λοιπόν οδηγοί συναρτήσεις $d(n)$, για τις οποίες μπορούμε να λύσουμε την (2) ακριβώς και υπάρχουν και άλλες για τις οποίες μπορούμε να πάρουμε ένα καλό άνω όριο.
Λέμε ότι μια συνάρτηση $f$ των ακέραιων είναι πολλαπλασιαστική εάν $f(xy) = f(x)f(y)$ για όλους τους θετικούς ακέραιους $x$ και $y$.
Αν η $d(n)$ είναι πολλαπλασιαστική τότε:

$$d\left(b^{k-j}\right) = \left(d\left(b\right)\right)^{k-j}$$

Άρα, η μερική λύση είναι:

$$X = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j \left(d\left(b\right)\right)^{k-j}$$

$$= \left(d\left(b\right)\right)^k \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{\alpha}{d\left(b\right)}\right)^j$$

$$= \left(d\left(b\right)\right)^k \frac{\left(\frac{\alpha}{d(b)}\right)^k - 1}{\frac{\alpha}{d(b)} - 1}$$

$$X = \frac{\alpha^k - \left(d\left(b\right)\right)^k}{\frac{\alpha}{d(b)} - 1} \tag{3}$$

Υπάρχουν 3 περιπτώσεις, που πρέπει να μελετηθούν:

(α) Εάν $\alpha > d(b)$, τότε η σχέση (3) είναι $O(\alpha^k)$ ή $O(n^{\log_b \alpha})$ αφού $k = \log_b n$. Σε αυτή την περίπτωση, η μερική και η ομογενής λύση είναι ίσες σε τάξη μεγέθους και εξαρτώνται μόνο από τα $\alpha, b$ και όχι από την οδηγό συνάρτηση $d(n)$.

$$T(n) = O\left(\alpha^k\right) = O\left(n^{\log_b \alpha}\right) \tag{4}$$

(β) Εάν $\alpha < d(b)$, τότε η σχέση (3) είναι $O\left(d\left(b\right)^k\right)$ ή $O\left(n^{\log_b d(b)}\right)$.

Σε αυτή την περίπτωση, η μερική λύση υπερβαίνει σε τάξη μεγέθους την ομογενή λύση. Άρα, αν θέλουμε να κάνουμε βελτιώσεις πρέπει να κοιτάξουμε εκτός από τα $\alpha, b$ και την οδηγό συνάρτηση $d(n)$. (Στην ειδική περίπτωση, που $d(n) = n^\alpha$, έχουμε $d(b) = b^\alpha$ και $\log_b(b^\alpha) = \alpha$. Άρα, η $T(n) = O(n^\alpha) = O\left(d\left(n\right)\right)$. Σε αυτή την περίπτωση, ισχύει ότι:

$$T\left(n\right) = O\left(\left(d\left(b\right)\right)^k\right) = O\left(n^\alpha\right) \tag{5}$$

(γ) Εάν $\alpha = d(b)$, τότε:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j \left(d\left(b\right)\right)^{k-j} \\ &= \left(d\left(b\right)\right)^k \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{\alpha}{d\left(b\right)}\right)^j \\ &= \left(d\left(b\right)\right)^k k \\ &= n^{\log_b d(b)} \log_b n \end{aligned}$$

Αφού $\alpha = d(b)$, παρατηρούμε ότι η μερική λύση είναι κατά $log_b n$ τάξη μεγέθους φορές η ομογενής λύση. Άρα, η μερική λύση υπερβαίνει και πάλι την ομογενή λύση. Λέμε λοιπόν ότι:

$$T\left(n\right) = O\left(n^{\log_b d(b)} \log_b n\right) \tag{6}$$

- Να μελετηθούν οι πιο κάτω σχέσεις αναδρομής:
  1. $T(n) = 4T(n/2) + n$
  2. $T(n) = 4T(n/2) + n^2$
  3. $T(n) = 4T(n/2) + n^3$

  Σε όλες τις πιο πάνω είναι $T(1) = 1$.

Σε κάθε μια από τις πιο πάνω έχουμε για την ομογενή λύση $\alpha = 4, b = 2$ άρα, η ομογενής λύση είναι $n^2$.

(1) Είναι $d(n) = n \Rightarrow d(b) = d(2) = 2$ και $\alpha = 4 \Rightarrow d(b) = 2$. Άρα, και η μερική λύση είναι $n^2$. Επομένως, $T(n) = O(n^2)$.

(2) Είναι $d(b) = 4 = \alpha$ άρα η μερική λύση και επομένως και η $T(n)$ είναι $O(n^2 \log n)$.

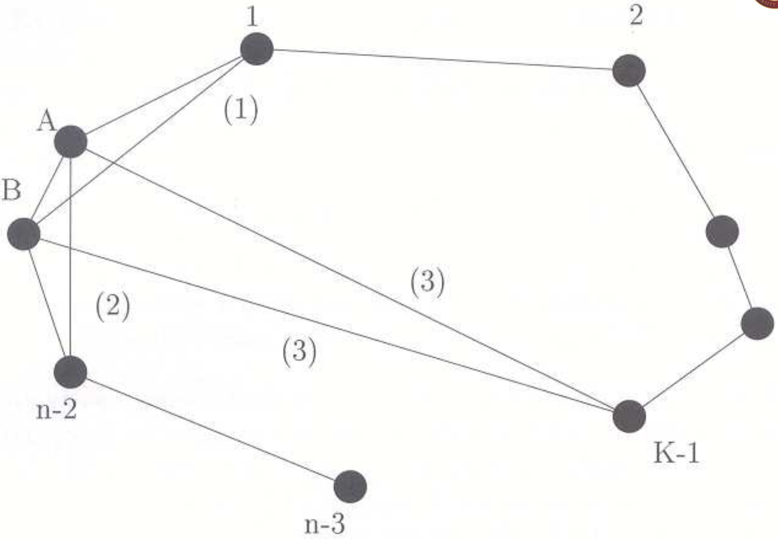
(3) Είναι $d(n) = n^3 \Rightarrow d(b) = d(2) = 8$ και $\alpha < d(b)$. Επομένως, η μερική λύση και επομένως και η $T(n)$ είναι $O\left(n^{\log_b d(b)}\right) = O\left(n^3\right)$.$\square$

- Να βρεθεί ο αριθμός $d_n$ των τριγωνισμών ενός κυρτού $n$-γώνου. Τριγωνισμός είναι ένα σύνολο από $n-3$ διαγώνιες με κάθε δυο από αυτές να μην τέμνονται στο εσωτερικό του $n$-γώνου.

Ας ξεχωρίσουμε δύο γειτονικές κορυφές του $n$-γώνου, έστω τις A,B, κι ας είναι $1, 2, \ldots, n-2$ οι υπόλοιπες $n-2$ κορυφές του ν-γώνου, όπως διατρέχουμε την περιφέρεια του $n$-γώνου από το A προς το B. Τότε, ο αριθμός των τριγωνισμών είναι, έστω $T_n$, ίσος με τον αριθμό των τριγωνισμών ενός $(n-1)$-γώνου, με δοσμένη την A στον τριγωνισμό του ν-γώνου, συν τον αριθμό των τριγωνισμών ενός $(n-1)$-γώνου, με δοσμένη τη B στον τριγωνισμό του $n$-γώνου, συν, τέλος, τον αριθμό:

$$\sum_{k=3}^{n-2} T_k T_{n+1-k},$$

.


1
2
(1)
A
B
(2)
(3)
(3)
n-2
K-1
n-3

όπου το $k$ κινείται από την κορυφή 2 εώς την κορυφή $n-3$, οπότε και σχηματίζεται ένα $k$-γωνο, με κορυφές $A, 1, \ldots, k-1$, κι ένα $(n+1-k)$-γωνο, με κορυφές $k-1, k, \ldots, n-2, B$, $(k = 3, 4, \ldots, n-2)$. Έτσι έχουμε,

$$T_n = \sum_{k=3}^{n-2} T_k T_{n-k+1} + 2T_{n-1} \overbrace{\Longrightarrow}^{T_2=1} T_n = \sum_{k=2}^{n-1} T_k T_{n+1-k} \overbrace{\Longrightarrow}^{T_k=S_{k-2}}$$

$$S_{n-2} = \sum_{k=2}^{n-1} S_{k-2} S_{n-1-k} \Longrightarrow S_{n-2} = \sum_{k=0}^{n-3} S_k S_{n-3-k} \Longrightarrow$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} S_{n-2} x^{n-3} = \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-3} S_k S_{n-3-k} x^{n-3} \Longrightarrow \frac{1}{x}[S(x) - s_0] = S^2(x) \Longrightarrow$$

$$xS^2(x) - S(x) + 1 = 0 \Longrightarrow S(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Άρα, οι $S_n$ είναι οι αριθμοί Catalan, δηλαδή,

$$S_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

όπου $n \geq 0$. Επομένως,

$$T_n = S_{n-2} \Longrightarrow T_n = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}, n \geq 3$$

# Λύση της σχέσης αναδρομής, που ορίζεται με συνέλιξ

Έστω η σχέση αναδρομής:

$$\alpha_n = \alpha_{n-r}\alpha_0 + \alpha_{n-r-1}\alpha_1 + \ldots + \alpha_0\alpha_r$$

ή

$$\alpha_n = \sum_{l=0}^{n-r} \alpha_{n-r-l}\alpha_l \tag{7}$$

η οποία ισχύει για $n \geq k$, όπου $k$ κάποιος ακέραιος. Όπως και στην παράγραφο (3.2.2) του βιβλίου θα δεχθούμε ότι $k \geq r$.
Είναι προφανές ότι η τιμή του $\alpha_n$ για $n \geq k$ μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά όταν οι τιμές των $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ είναι γνωστές. Αυτές οι τιμές των $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ είναι οι αρχικές συνθήκες.
Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη της (7) με $x^n$ και παίρνοντας το άθροισμα από $n = k$ μέχρι $n = \infty$ έχουμε:

$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha_n x^n = \sum_{n=k}^{\infty} \left(\alpha_{n-r}\alpha_0 + \alpha_{n-r-1}\alpha_1 + \ldots + \alpha_0\alpha_{n-r}\right) x^n$$

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων της συνέλιξης και της ολίσθησης έχουμε:

$$\begin{aligned} A\left(x\right) - \alpha_0 - \alpha_1 x - \ldots - \alpha_{k-1}x^{k-1} = \\ x^r \Big[A\left(x\right)A\left(x\right) - \alpha_0^2 - \left(\alpha_1\alpha_0 + \alpha_0\alpha_1\right)x - \\ \ldots - \left(\alpha_{k-r-1}\alpha_0 + \alpha_{k-r-2}\alpha_1 + \ldots + \alpha_0\alpha_{k-r-1}\right)x^{k-r-1}\Big] \end{aligned} \quad (8)$$

Η (8) είναι μια αλγεβρική εξίσωση 2ου βαθμού ως προς $A(x)$, η οποία μπορεί να λυθεί. Η $A(x)$ είναι η συνήθης γεννήτρια συνάρτηση και άρα, μπορούμε να βρούμε ποια ακολουθία έχει την $A(x)$ γεννήτρια συνάρτηση.

- Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων, που μπορούμε να βάλουμε παρενθέσεις στην έκφραση:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-1} + \lambda_n$$

έτσι ώστε, μόνο 2 όροι να προστίθενται κάθε φορά.

Ας είναι $\alpha_i$ ο αριθμός των τρόπων, που μπορούμε να βάλουμε παρενθέσεις σε μια έκφραση με $i$ όρους.
Θεωρούμε τις 2 υποεκφράσεις:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-r}, \quad \lambda_{n-r+1} + \lambda_{n-r+2} + \ldots + \lambda_n$$

Άρα, υπάρχουν $\alpha_{n-r}$ τρόποι να βάλουμε παρενθέσεις στην πρώτη έκφραση και $\alpha_r$ τρόποι να βάλουμε παρενθέσεις στην δεύτερη έκφραση. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $\alpha_{n-r}\alpha_r$ τρόποι να βάλουμε παρενθέσεις σε όλη την έκφραση.
Δηλαδή,

$$\alpha_n = \alpha_{n-1}\alpha_1 + \alpha_{n-2}\alpha_2 + \ldots + \alpha_2\alpha_{n-2} + \alpha_1\alpha_{n-1} \Rightarrow$$

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n-k}\alpha_k \quad \text{για } n \geq 2$$

Προφανώς, $\alpha_1 = 1$.
Θέτουμε $\alpha_0 = 0$ και η πιο πάνω σχέση μπορεί να ξαναγραφτεί ως εξής:

$$\alpha_n = \alpha_n\alpha_0 + \alpha_{n-1}\alpha_1 + \ldots + \alpha_1\alpha_{n-1} + \alpha_0\alpha_n, n \geq 2$$
$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n-k}\alpha_k$$

Πολλαπλασιάζοντας με $x^n$ και αθροίζοντας από $n = 2$ έως $n = \infty$ έχουμε:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\alpha_n\alpha_0 + \alpha_{n-1}\alpha_1 + \ldots + \alpha_1\alpha_{n-1} + \alpha_0\alpha_n\right) x^n$$
$$A(x) - \alpha_1 x - \alpha_0 = [A(x)]^2 - \alpha_0^2 - (\alpha_1\alpha_0 + \alpha_0\alpha_1)\, x \Rightarrow$$
$$[A(x)]^2 - A(x) + x = 0 \Rightarrow$$
$$A(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$$

Αν και υπάρχουν δυο λύσεις για την $A(x)$, θα πάρουμε αυτή τη λύση, που μας εξασφαλίζει μια ακολουθία θετικών αριθμών. Είναι γνωστό (αν όχι αποδείξτε το) ότι η συνάρτηση $(1-4x)^{1/2}$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας:

$$\alpha_n = -\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Άρα, θα επιλέξουμε τη λύση:

$$A(x) = 1/2 - 1/2\sqrt{1-4x}$$

για να εξασφαλίσουμε ακολουθία θετικών αριθμών. Η ακολουθία:

$$\alpha_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} & n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

έχει γεννήτρια συνάρτηση την $A(x) = 1/2 - 1/2\sqrt{1-4x}$ (ας το αποδείξει ο αναγνώστης). $\square$

Ας θεωρήσουμε τώρα την εξής σχέση αναδρομής:

$$b_n = \alpha_{n-r} b_0 + \alpha_{n-r-1} b_1 + \ldots + \alpha_0 b_{n-r}$$

ή

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-r} \alpha_{n-r-k} b_k$$

η οποία ισχύει για $n \geq k$, όπου $k$ κάποιος ακέραιος και $k \geq r$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη με $x^n$ και αθροίζοντας από $n = k$ μέχρι $n = \infty$, έχουμε:

$$\sum_{n=k}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=k}^{\infty} (\alpha_{n-r} b_0 + \alpha_{n-r-1} b_1 + \ldots + \alpha_0 b_{n-r})\, x^n \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
& B(x) - b_0 - b_1 x - \ldots - b_{k-1} x^{k-1} = \\
& \qquad = x^r \Big[ A(x)\, B(x) - \alpha_0 b_0 - (\alpha_1 b_0 + \alpha_0 b_1)\, x - \ldots \\
& \qquad\quad - (\alpha_{k-r-1} b_0 + \alpha_{k-r-2} b_1 + \ldots + \alpha_0 b_{k-r-1})\, x^{k-r-1} \Big]
\end{aligned}
$$

Εάν τώρα η $A(x)$ ή η $B(x)$ είναι γνωστή μαζί με τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες (και αυτές γνωστές), τότε μπορούμε να υπολογίσουμε είτε την $A(x)$ είτε την $B(x)$.

- Με τη βοήθεια των σχέσεων αναδρομής να υπολογιστεί ο αριθμός των τρόπων επιλογής $r$ αντικειμένων με επαναλήψεις από ένα σύνολο $n$ διαφορετικών αντικειμένων.

Έστω $n$ θετικός ακέραιος. Για $r \geq 0$, έστω $\alpha_{n,r}$ ο αριθμός των τρόπων επιλογής ρ αντικειμένων με επαναλήψεις από ν διαφορετικά αντικείμενα. Για $n \geq 0$, ας είναι $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ το σύνολο αυτών των αντικειμένων και ας θεωρήσουμε το αντικείμενο $b_1$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Το αντικείμενο $b_1$ δεν επιλέγεται ποτέ. Τότε, τα ρ αντικείμενα επιλέγονται από το σύνολο $\{b_2, \ldots, b_n\}$. Αυτό μπορεί να γίνει με $\alpha_{n-1,r}$ τρόπους.
- Το αντικείμενο $b_1$ επιλέγεται τουλάχιστον μία φορά. Τότε, πρέπει να επιλέξομε ρ-1 αντικείμενα από το σύνολο $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ έτσι ώστε, να είναι δυνατή η επανεπιλογή του $b_1$. Υπάρχουν $\alpha_{n,r-1}$ τρόποι για να επιτευχθεί αυτό.

Αφού οι παραπάνω δύο τρόποι επιλογής των $r$ αντικειμένων είναι αμοιβαία αποκλειόμενοι και καλύπτουν όλες τις δυνατές επιλογές έχουμε:

$$\alpha_{n,r} = \alpha_{n-1,r} + \alpha_{n,r-1}$$

Έστω

$$f_n = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_{n,r} x^r$$

η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\alpha_{n,0}, \alpha_{n,1}, \ldots$. Από την προηγούμενη σχέση για $n \geq 1, r \geq 1$ παίρνουμε,

$$\alpha_{n,r} x^r = \alpha_{n-1,r} x^r + \alpha_{n,r-1} x^r \Longrightarrow$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \alpha_{n,r} x^r = \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_{n-1,r} x^r + \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_{n,r-1} x^r$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις προφανείς αρχικές συνθήκες $\alpha_{n,0} = 1$ για $n \geq 0$ και $\alpha_{0,r} = 0$ για $r > 0$ παίρνουμε,

$$f_n - \alpha_{n,0} = f_{n-1} - \alpha_{n-1,0} + x \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_{n,r-1} x^{r-1} \Longrightarrow$$

$$f_n - 1 = f_{n-1} - 1 + x f_n \Longrightarrow f_n - x f_n = f_{n-1} \Longrightarrow$$

$$f_n = \frac{f_{n-1}}{1-x} \Longrightarrow f_n = \frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n}$$

Αφού, ο $\alpha_{n,r}$ είναι ο συντελεστής του $x^r$ εις το ανάπτυγμα της $f_n$ θα έχομε $\alpha_{n,r} = \binom{-n}{r}(-1)^r = \binom{n+r-1}{r}$.