Διακριτά Μαθηματικά

Φροντιστήριο

Σχέσεις Αναδρομής Ι

Να λυθεί η παρακάτω σχέση αναδρομής με δύο τρόπο

$$\alpha_n - 4\alpha_{n-1} + 4\alpha_{n-2} = n + 2, \alpha_0 = 6, \alpha_1 = 7$$

Να λυθεί η παρακάτω σχέση αναδρομής με δύο τρόπο

$$\alpha_n - 4\alpha_{n-1} + 4\alpha_{n-2} = n + 2, \alpha_0 = 6, \alpha_1 = 7$$

1ος τρόπος: Θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή της γραμμικής, που είναι η $\alpha_n - 4\alpha_{n-1} + 4\alpha_{n-2} = 0$ και παίρνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωσή της για να βρούμε την ομογενή λύση της γραμμικής:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \iff (x-2)^2 = 0 \iff x = 2, \ \textit{διπλή ρίζα}.$$

Άρα,

$$\alpha_n^{(h)} = (An + B)2^n.$$

Επιχειρούμε τώρα να βρούμε την ειδική λύση της γραμμικής. Δοκιμάζουμε την $a_n^{(p)} = Cn + D$ και έχουμε,

$$Cn + D - 4(Cn - C + D) + 4(Cn - 2C + D) = n + 2 \iff$$

$$Cn + D - 4C = n + 2 \iff (C = 1, D = 6)$$

Άρα, $\alpha_n^{(p)} = n + 6$. Επομένως η δοθείσα γραμμική έχει γενική λύση,

$$\alpha_n = (An+B)2^n+n+6 \overbrace{\Longrightarrow}^{n=0,n=1} \left\{ \begin{array}{l} B+6=6 \\ 2A+2B+7=7 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B=0 \\ A=0 \end{array} \right\}.$$

Άρα, η γενική λύση της δοθείσης γραμμικής είναι η,

$$\alpha_n = n+6, \ \forall n \in N$$

2ος τρόπος:

$$\alpha_n - 4\alpha_{n-1} + 4\alpha_{n-2} = n + 2 \iff$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k - 4x \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} x^{k-1} + 4x^2 \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_{k-2} x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} (k+2) x^k \iff$$

$$A(x) - \alpha_0 - \alpha_1 x - 4x[A(x) - \alpha_0] + 4x^2 A(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2} - (2+3x) \iff$$

$$(4x^2 - 4x + 1)A(x) - 6 - 7x + 24x = \frac{2-x}{(1-x)^2} - (2+3x) \iff$$

$$A(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2(2x-1)^2} + \frac{4-20x}{(2x-1)^2} = \frac{-5x+6}{(1-x)^2} \implies$$

$$A(x) = \frac{5}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} = 5\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} (-1)^k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} (-1)^k x^k$$

Άρα,

$$a_n = 5\binom{-1}{n}(-1)^n + \binom{-2}{n}(-1)^n = 5 + n + 1 = n + 6, \ \forall n \in N.$$

Να λυθεί η παρακάτω σχέση αναδρομής με δύο τρόπ

$$\alpha_n + \alpha_{n-1} + \frac{1}{4}\alpha_{n-2} = 0, \alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$$

Να λυθεί η παρακάτω σχέση αναδρομής με δύο τρόπ

$$\alpha_n + \alpha_{n-1} + \frac{1}{4}\alpha_{n-2} = 0, \alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$$

1ος τρόπος: Έστω $\alpha_n = Ax^n$. Τότε θα πάρουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση της αναδρομικής σχέσης, η οποία είναι η $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$, με ρίζες τις $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$ (διπλή ρίζα). Άρα $\alpha_n = (An + B)(-\frac{1}{2})^n$ και από τις αρχικές συνθήκες $\alpha_0 = B = 0$ και $\alpha_1 = -\frac{1}{2}(A + B) = -\frac{1}{2}A = 1 \Longrightarrow A = -2$, οπότε, τελικά:

$$\alpha_n = -2n(-\frac{1}{2})^n, \ \forall n \in N$$

2ος τρόπος:

Είναι,

$$\alpha_n+\alpha_{n-1}+\frac{1}{4}\alpha_{n-2}=0 \Longleftrightarrow \sum_{k=2}^{\infty}[\alpha_k x^k+\alpha_{k-1}x^k+\frac{1}{4}\alpha_{k-2}x^k]=0 \Longleftrightarrow$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\alpha_k x^k+x\sum_{k=2}^{\infty}\alpha_{k-1}x^{k-1}+\frac{1}{4}x^2\sum_{k=2}^{\infty}\alpha_{k-2}x^{k-2}=0 \overbrace{\Longleftrightarrow}^{A(x) \text{ γεννήτρια της } \alpha_n}$$

$$A(x) - \alpha_0 - \alpha_1 x + x[A(x) - \alpha_0] + \frac{1}{4}x^2 A(x) = 0 \overbrace{\Longleftrightarrow}^{\alpha_0=0,\alpha_1=1}$$

$$A(x) - x + xA(x) + \frac{1}{4}x^2 A(x) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$A(x) = \frac{x}{\frac{1}{4}x^2 + x + 1} = \frac{4x}{x^2 + 4x + 4} \Longleftrightarrow$$

$$A(x) = \frac{4x}{(x+2)^2} = \frac{x}{(1+\frac{x}{2})^2} = x\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} (\frac{x}{2})^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} (\frac{1}{2})^k x^{k+1}$$

Άρα,

$$\alpha_n = \binom{-2}{n-1} (\frac{1}{2})^{n-1} = -2n(-\frac{1}{2})^n, \ \forall n \in N$$