Διακριτά Μαθηματικά

Σχέσεις Αναδρομής II

Να λυθεί η σχέση αναδρομής $a_n = 10a_{n-1}^2$, για $n \geqslant 1$ $a_0 = 1$

Να λυθεί η σχέση αναδρομής $a_n = 10a_{n-1}^2$, για $n \geqslant 1$ $a_0 = 1$

Θέτουμε: $b_n = \log a_n$ με $b_0 = \log 1 = 0$ και επίσης, $\log a_n = \log 10 + \log a_{n-1}^2 \Rightarrow \log a_n = 2 \log a_{n-1} + \log 10 \Rightarrow b_n = 2b_{n-1} + 1$.
Η τελευταία έχει λύση $b_n = 2^{n+1} - 1 \quad \forall n \in N$, άρα
$a_n = 10^{b_n} \Rightarrow a_n = 10^{2^{n+1}-1} \quad \forall n \in N$.

Να λυθεί

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n, \; T(1) = 1$$

Να λυθεί

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n, T(1) = 1$$

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n = 2[2T(\frac{n}{2^2}) + \frac{n}{2}] + n =$$

$$= 2^2 T(\frac{n}{2^2}) + 2n = 2^2[2T(\frac{n}{2^3}) + \frac{n}{2^2}] + 2n =$$

$$= 2^3 T(\frac{n}{2^3}) + 3n = \ldots = 2^i T(\frac{n}{2^i}) + in$$

Επομένως, αν $n = 2^i$, έχουμε:

$$T(n) = n + n \log n \Longrightarrow T(n) = O(n \log n)$$

Να λυθεί

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n\log n,\ T(1) = 1$$

Να λυθεί

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n\log n,\ T(1) = 1$$

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n\log n = 2[2T(\frac{n}{2^2}) + \frac{n}{2}\log\frac{n}{2}] + n\log n =$$

$$= 2^2T(\frac{n}{2^2}) + 2\frac{n}{2}\log\frac{n}{2} + n\log n = 2^2[2T(\frac{n}{2^3}) + 2\frac{n}{2}\log\frac{n}{2}] + 2\frac{n}{2}\log\frac{n}{2} + n\log n$$

$$= 2^3T(\frac{n}{2^3}) + n\log\frac{n}{2^2} + n\log\frac{n}{2} + n\log n = \ldots = 2^iT(\frac{n}{2^i}) + \sum_{k=0}^{i-1} n\log\frac{n}{2^k}$$

Επομένως, αν $n = 2^i$, έχουμε:

$$T(n) = n + n[\log n + \log\frac{n}{2} + \ldots \Longrightarrow T(n) = O(n(\log n)^2)$$

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε παρενθέσεις στο γινόμενο $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ βάζοντας παρένθεση σε κάθε δύο όρους του γινομένου, έτσι ώστε να πολλαπλασιάζονται δύο όροι κάθε φορά.
Ας είναι α_n ο αριθμός των τρόπων να τοποθετήσουμε παρενθέσεις στο γινόμενο ν όρων. Θεωρούμε τα δύο υπογινόμενα $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-r}$ και $x_{n-r+1} \cdot x_{n-r+2} \cdot \ldots \cdot x_n$. Υπάρχουν α_{n-r} τρόποι να βάλουμε παρενθέσεις στην 1η έκφραση και α_r τρόποι να βάλουμε παρενθέσεις στη 2η έκφραση, επομένως $\alpha_r \cdot \alpha_{n-r}$ τρόποι να βάλουμε παρενθέσεις σε όλο το γινόμενο, όπου βεβαίως το τελευταίο ζεύγος εκφράσεων, που θα πολλαπλασιαστεί είναι το ζεύγος των δύο παραπάνω υπογινομένων. Οταν το r κινηθεί από 1 εώς $n-1$ παίρνουμε τη σχέση αναδρομής,

$$\alpha_n = \alpha_{n-1}\alpha_1 + \alpha_{n-2}\alpha_2 + \ldots + \alpha_2\alpha_{n-2} + \alpha_1\alpha_{n-1},$$

με $\alpha_1 = 1$. Θέτουμε $\alpha_0 = 0$ και γράφουμε την προηγούμενη,

$$\alpha_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \alpha_{n-i} \Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \alpha_{n-i} x^n \Longrightarrow$$

$$A(x) - \alpha_1 x - \alpha_0 = A^2(x) - \alpha_0^2 - (\alpha_1\alpha_0 + \alpha_0\alpha_1)x \Longrightarrow$$

$$A^2(x) - A(x) + x = 0 \Longrightarrow A(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$$

Δεχόμαστε τη λύση με το '-', που δίδει θετικούς συντελεστάς δυνάμεων του x. Έτσι έχουμε,

$$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [-\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1} x^n]$$

οπότε,

$$A(x) = \frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{1}{2}[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n] \Longrightarrow A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n$$

Άρα, είναι:

$$\alpha_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} & n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$