ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

1. Δίνεται ότι: '*τόσο οι θέσεις όσο και οι σύνεδροι της κάθε ομάδας δε διακρίνονται μεταξύ τους*'. Επομένως, διανομές των θέσεων που προκύπτουν η μία από την άλλη με ανταλλαγή θέσεων συνέδρων μεταξύ τους, ή προσώπων συνέδρων, χωρίς αλλαγή του αριθμού των συνέδρων της κάθε ομάδας, δε μετράνε ως διαφορετικές. Έτσι, το πρόβλημα μετατρέπεται σε πρόβλημα τοποθέτησης μη διακεκριμένων (δηλ., ίδιων) αντικειμένων σε διακεκριμένες υποδοχές (τις διαφορετικές ομαδες).

   Αν μία ομάδα έχει $n+1$ θέσεις, τότε οι δύο άλλες δε μπορούν ποτέ να έχουν πλειοψηφία. Άρα για να απαντήσουμε στην ερώτηση πρέπει:

   1. να βρούμε με πόσους τρόπους μπορούν να διανεμηθούν $2n+1$ θέσεις σε 3 ομάδες χωρίς περιορισμό, και
      - Τρόποι τοποθέτησης $2n+1$ ίδιων αντικειμένων σε 3 υποδοχές: $\binom{2n+1+3-1}{2n+1} = \binom{2n+3}{2n+1}$
   2. να αφαιρέσουμε από αυτούς εκείνους τους τρόπους που δίνουν τουλάχιστον $n+1$ θέσεις σε μία μόνο ομάδα
      - Δίνουμε $n+1$ θέσεις σε μία από τις ομάδες οπότε μένουν για διανομή $2n+1-n-1 = n$ θέσεις
      - Τρόποι τοποθέτησης n ίδιων αντικειμένων σε 3 υποδοχές: $\binom{n+3-1}{n} = \binom{n+2}{n}$
      - Συνολικά, αφού υπάρχουν 3 ομάδες: $3 \cdot \binom{n+2}{n}$

   Οπότε οι ζητούμενοι τρόποι είναι: $\binom{2n+3}{2} - 3 \cdot \binom{n+2}{2} = \frac{n}{2} \cdot (n+1)$

2. Ας είναι α_i ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να βάλουμε παρενθέσεις σε μια έκφραση με i όρους.

   Θεωρούμε τις 2 υποεκφράσεις:

   $$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-r}, \quad \lambda_{n-r+1} + \lambda_{n-r+2} + \ldots + \lambda_n$$

   Άρα υπάρχουν α_{n-r} τρόποι να βάλουμε παρενθέσεις στην πρώτη έκφραση και α_r τρόποι να βάλουμε παρενθέσεις στην δεύτερη έκφραση. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $\alpha_{n-r}\alpha_r$ τρόποι να βάλουμε παρενθέσεις σε όλη την έκφραση.

   Δηλαδή

   $$\alpha_n = \alpha_{n-1}\alpha_1 + \alpha_{n-2}\alpha_2 + \ldots + \alpha_2\alpha_{n-2} + \alpha_1\alpha_{n-1} \Rightarrow$$
   $$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n-k}\alpha_k \quad \text{για } n \geq 2$$

Προφανώς $\alpha_1 = 1$.

Θέτουμε $\alpha_0 = 0$ και η πιο πάνω σχέση μπορεί να ξαναγραφτεί ως εξής:

$$\alpha_n = \alpha_n \alpha_0 + \alpha_{n-1}\alpha_1 + \ldots + \alpha_1 \alpha_{n-1} + \alpha_0 \alpha_n, n \geq 2$$
$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n-k}\alpha_k$$

Πολλαπλασιάζοντας με x^n και αθροίζοντας από $n = 2$ έως $n = \infty$ έχουμε:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\alpha_n \alpha_0 + \alpha_{n-1}\alpha_1 + \ldots + \alpha_1 \alpha_{n-1} + \alpha_0 \alpha_n\right) x^n$$
$$A\left(x\right) - \alpha_1 x - \alpha_0 = \left[A\left(x\right)\right]^2 - \alpha_0^2 - \left(\alpha_1\alpha_0 + \alpha_0\alpha_1\right) x \Rightarrow$$
$$\left[A\left(x\right)\right]^2 - A\left(x\right) + x = 0 \Rightarrow$$
$$A\left(x\right) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$$

Αν και υπάρχουν δυο λύσεις για την $A(x)$, θα πάρουμε αυτή τη λύση που μας εξασφαλίζει μια ακολουθία θετικών αριθμών.

Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $(1-4x)^{1/2}$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$\alpha_n = -\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Άρα θα επιλέξουμε τη λύση

$$A\left(x\right) = 1/2 - 1/2\sqrt{1-4x}$$

για να εξασφαλίσουμε ακολουθία θετικών αριθμών. Η ακολουθία

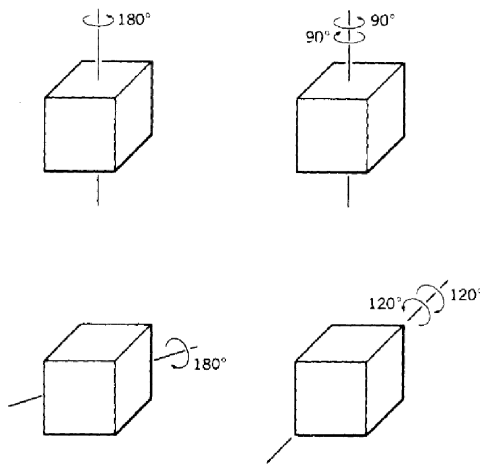
$$\alpha_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} & n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

έχει γεννήτρια συνάρτηση την $A\left(x\right) = 1/2 - 1/2\sqrt{1-4x}$

3. Έστω G το σύνολο μεταθέσεων που αντιστοιχούν σε όλες τις περιστροφές του κύβου. Υπάρχουν 24 μεταθέσεις στο G που ομαδοποιούνται στις παρακάτω 5 κατηγορίες:

    1. Ταυτοτική μετάθεση. Κυκλική αναπαράσταση: x_1^8
    2. 3 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180^o γύρω από άξονες που συνδέουν τα μέσα απέναντι όψεων. Κυκλική αναπαράσταση: $3x_2^4$
    3. 6 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές 90^o γύρω από άξονες που συνδέουν τα μέσα απέναντι όψεων. Κυκλική αναπαράσταση: $6x_4^2$

4. 6 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180^o γύρω από άξονες που συνδέουν τα μέσα απέναντι ακμών. Κυκλική αναπαράσταση: $6x_2^4$
5. 8 μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές 120^o γύρω από άξονες που συνδέουν απέναντι κορυφές. Κυκλική αναπαράσταση: $8x_1^2x_3^2$



Επομένως, ο δείκτης κύκλων του συνόλου μεταθέσεων G είναι: $P_G = \frac{1}{24}(x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2x_3^2)$.

Αφού έχουμε δύο χρώματα, ο κατάλογος προτύπων είναι: $P_G = \frac{1}{24}((x+y)^8 + 9(x^2+y^2)^4 + 6(x^4+y^4)^2 + 8(x+y)^2(x^3+y^3)^2)$.

Θέτοντας $w(x) = w(y) = 1$ στην παραπάνω σχέση, το πλήθος των προτύπων είναι 23 που δίνει και το πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών των 8 κορυφών του κύβου με 2 χρώματα.

4. Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_7$ τα δεκαδικά ψηφία του αριθμού x, που ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος. Προφανώς ο ζητούμενος αριθμός των ακεραίων αυτών ισούται με τον αριθμό των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης,

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_7 = 31$$

όπου $0 \leq x_i \leq 9$ για $1 \leq i \leq 7$. Ας είναι λοιπόν c_i η ιδιότητα στη λύση $(x_1, x_2, \ldots, x_7)$ της παραπάνω εξίσωσης το x_i να είναι μεγαλύτερο του 9. Τότε αναζητούμε προφανώς το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \ldots \overline{c_7})$.

Έχουμε (Βλέπε και άσκηση βιβλίου 5.13) ότι,

$$N = \binom{31+7-1}{31} = \binom{37}{31}, N(c_i) = \binom{21+7-1}{21} = \binom{27}{21}, N(c_ic_j) = \binom{11+7-1}{11} = \binom{17}{11}$$

$$N(c_ic_jc_k) = \binom{1+7-1}{1} = \binom{7}{1}, N(c_ic_jc_kc_l) = 0, N(c_ic_jc_kc_lc_m) = 0$$

$$N(c_ic_jc_kc_lc_mc_n) = 0, N(c_1c_2 \ldots c_7) = 0$$

Έτσι σύμφωνα με την Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού έχουμε,

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \dots \overline{c_7}) = \binom{37}{31} - \binom{7}{1}\binom{27}{21} + \binom{7}{2}\binom{17}{11} - \binom{7}{3}\binom{7}{1} = 512365$$